



Schémas en éléments finis discontinus localement raffinés en espace et en temps pour les équations de Maxwell 1D

Serge Piperno

► To cite this version:

Serge Piperno. Schémas en éléments finis discontinus localement raffinés en espace et en temps pour les équations de Maxwell 1D. RR-4986, INRIA. 2003. [inria-00071592](https://hal.inria.fr/inria-00071592)

HAL Id: [inria-00071592](https://hal.inria.fr/inria-00071592)

<https://hal.inria.fr/inria-00071592>

Submitted on 23 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

***Schémas en éléments finis discontinus localement
raffinés en espace et en temps pour les équations de
Maxwell 1D***

Serge Piperno

N° 4986

Octobre 2003

_____ THÈME 4 _____



***apport
de recherche***

Schémas en éléments finis discontinus localement raffinés en espace et en temps pour les équations de Maxwell 1D

Serge Piperno *

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet Caiman

Rapport de recherche n° 4986 — Octobre 2003 — 57 pages

Résumé : Dans ce rapport, on fait un tour d'horizon des méthodes numériques disponibles pour la simulation numérique d'équations de propagation d'ondes (électromagnétisme, acoustique) en une dimension d'espace. On s'intéresse uniquement aux méthodes susceptibles d'être étendues en trois dimensions d'espace sur maillages non-structurés (on compare néanmoins celles-ci au schéma de Yee en une dimension) et qui conservent une énergie discrète : méthodes de volumes finis, méthodes de type Galerkin Discontinu. On étudie en détail leurs propriétés et on montre la possibilité de les utiliser sur des maillages localement raffinés en temps et en espace, notamment en conservant leur nature totalement explicite.

Mots-clés : électromagnétisme, volumes finis, Galerkin Discontinu, flux centrés, schéma saute-mouton, stabilité, algorithme de couplage, raffinement local en espace, raffinement local en temps, sous-cyclage

* CERMICS, INRIA, BP93, F-06902 Sophia-Antipolis Cedex, Serge.Piperno@sophia.inria.fr

Discontinuous Finite Volume/Element Methods on grids locally refined in time and space for 1D Maxwell equations

Abstract: In this report, we review available numerical methods for the simulation of wave propagation (electromagnetics, acoustics) in one space dimension. We only deal with methods easily extendible to three space dimensions and unstructured grids (we compare them in one dimension with Yee's FDTD though) and which do conserve a discrete energy (they are genuinely non dissipative): like finite volumes and Galerkin Discontinuous methods. We investigate in details their properties and show it is possible to couple them on locally refined grids, both in time and space, and preserve their totally explicit nature.

Key-words: electromagnetics, finite volume methods, Discontinuous Galerkin, centered fluxes, leap-frog time scheme, stability, coupling algorithm, locally refined grids, locally refined time-stepping, subcycling

1 Introduction

Les méthodes de types éléments finis discontinus (volumes finis [6, 8] et méthodes de Galerkin Discontinu [2, 7]) ont récemment pris une place significative dans la simulation numérique de phénomènes de propagation d'ondes, par exemple en électromagnétisme ou en acoustique. Ces méthodes cherchent en fait à supplanter les méthodes de type FDTD (Finite Differences Time-Domain) fondées sur le schéma de Yee [9], qui ont des avantages très importants (très grande efficacité, précision sur maillage régulier cartésien, conservation d'un équivalent discret de l'énergie électromagnétique ou acoustique) mais aussi l'inconvénient majeur d'être bien moins efficaces en maillages déformés et sur des géométries réalistes (non cartésiennes).

Nous avons développé des méthodes numériques capables de fonctionner sur des maillages tridimensionnels en simplexes [6, 7] (maillages de type éléments finis en tétraèdres) et qui possèdent les propriétés les plus importantes des méthodes FDTD, la conservation d'une énergie, la précision (en maillage régulier) et le caractère fondamentalement explicite (à la différence des éléments finis sans condensation de masse). Ces méthodes permettent d'attaquer des géométries complexes, et de fonctionner sur des maillages localement raffinés (avec plus ou moins de bonheur si le maillage est raffiné brusquement). D'une certaine manière, ces méthodes apportent une réponse partielle au problème global posé par la simulation numérique d'une propagation d'onde dans un milieu présentant des détails géométriques ou des inclusions hétérogènes de petite taille. En effet, la gestion de la géométrie ne pose pas de problème (les méthodes FDTD sont rapidement hors-jeu car le maillage régulier en trois dimensions doit s'appuyer sur des cubes élémentaires de taille constante, égale aux plus petits détails que l'on souhaite traiter). Mais la contrainte sur le pas de temps assurant la stabilité des schémas (explicites) s'exprime en fonction de la plus petite maille du maillage. Ainsi, le calcul est inutilement coûteux dans des zones de maillage peu raffinées.

Dans ce rapport, on cherche donc à proposer des algorithmes de couplage, de nature décalée qui permettraient de sous-cycler certains sous-domaines pendant le calcul, tout en conservant les propriétés de base des méthodes numériques de départ, à savoir :

- stabilité sous des conditions de type CFL similaires;
- conservation d'un équivalent discret de l'énergie;
- précision (autant que possible) aux interfaces entre sous-domaines;
- nature fondamentalement explicite de l'algorithme global (aucune matrice non locale à inverser, même quand le rapport entre les pas de temps utilisés dans des sous-domaines voisins devient grand).

Nous cherchons donc à nous rapprocher de travaux similaires proposés pour la simulation numérique d'interaction fluide-structure [5, 4], où la contrainte de pouvoir réutiliser des codes différents (de simulation de la dynamique des fluides et des structures) imposait aussi un couplage faible, décalé (un système après l'autre est avancé dans le temps), sous-cyclé (si les temps caractéristiques d'évolution des sous-systèmes sont différents), stable et facilement implémentable (pas de schéma globalement implicite couplant les inconnues du problème

dans les différents sous-domaines). Il est assez clair que l'objectif unique est le couplage en temps de différents sous-domaines. Les algorithmes proposés s'étendront, naturellement, comme dans le cas de l'interaction fluide-structure, à des problèmes tridimensionnels. Cette démarche doit donc aboutir à des algorithmes par essence différents de ceux proposés par exemple par T. Fouquet dans sa thèse [3], où chaque pas de temps s'accompagne d'une résolution d'un système linéaire non-local en temps.

Ce rapport s'organise ainsi. Dans la Section 2, on présente les méthodes numériques sur lesquelles on s'appuiera pour la résolution des équations de l'acoustique en une dimension d'espace: le schéma de Yee [9], une méthode de volumes finis avec flux centrés [6] et une méthode de type Galerkin Discontinu [7], toutes trois d'ordre deux sur maillages réguliers. Nous résumons leurs propriétés (stabilité, convergence) respectives, et nous montrons au passage comment passer à des ordres supérieurs en temps (volumes finis et Galerkin Discontinu). Dans la Section 3, on propose des algorithmes de couplage (décalés, sous-cyclés) pour les trois méthodes envisagées: FDTD (Section 3.1), Volumes finis (Section 3.2) et méthode de type Galerkin Discontinu (Section 3.3). Pour les deux dernières, qui peuvent gérer des maillages irréguliers, des simulations numériques rendent compte des propriétés effectives des algorithmes proposés.

2 Présentation des schémas considérés

2.1 Introduction

On présente dans cette section plusieurs schémas de type différences finies, volumes finis ou éléments finis de type Galerkin discontinu, utilisés de façon standard pour la résolution des équations monodimensionnelles de l'acoustique ou de Maxwell. Dans ce qui suit, on considère les équations régissant la propagation d'une onde dans un milieu homogène où la vitesse des ondes vaut c . Ces équations s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Dans ces équations, u et v constituent la solution du problème et dépendent du temps t et de l'abscisse x . On peut vérifier élémentairement que u et v sont aussi solution de l'équation monodimensionnelle des ondes. Le fait de s'intéresser ici à un milieu de propagation homogène (c ne dépend pas de x) n'est pas réducteur, puisqu'on peut s'y ramener par changement de variable sur l'abscisse x . On retrouve d'ailleurs cette dualité sur les maillages et la propagation en milieu homogène sur maillage raffiné localement pose les mêmes problèmes que la propagation en milieu hétérogène sur maillage régulier.

Ces équations sont posées soit dans tout l'espace (i.e. \mathbb{R} tout entier), soit sur un intervalle de longueur finie avec des conditions aux limites périodiques, de telle sorte que, dans les

estimations d'énergie, il n'y aura pas lieu de détailler les limites des sommations sur les indices des points du maillages.

Nous considérons dans ce rapport uniquement des schémas utilisés pour la résolution des équations de Maxwell dans le domaine temporel et qui ont les propriétés fondamentales suivantes:

- les schémas sont explicites (pour avancer d'un pas de temps, il n'y a aucun système linéaire à résoudre, ou alors de taille limitée à quelques unités – en aucun cas dépendant de la taille du maillage);
- les schémas ne sont pas dissipatifs, ils conservent exactement une énergie discrète (ceci exclut donc par exemple les schémas en volumes finis ou de type Galerkin discontinu utilisant des flux décentrés), ce qui les rend potentiellement utilisable pour des calculs de diffraction et de résonance en temps éventuellement long.

Pour chacun des schémas considérés, on s'intéresse notamment à ses propriétés sur un maillage régulier (précision, convergence, domaine de stabilité, dispersion numérique) mais aussi sur un maillage non régulier (mailles aléatoires sans grand écart entre mailles successives ou maillages localement fortement raffinés).

2.2 Schéma de Yee

Nous considérons tout d'abord le schéma proposé par Yee [9] sur maillage régulier. Il s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{v_{i+1/2}^{n+1/2} - v_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = 0, \\ \frac{v_{i+1/2}^{n+3/2} - v_{i+1/2}^{n+1/2}}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{\Delta x} = 0, \end{cases}$$

où Δt et Δx sont respectivement les pas (constants) de temps et d'espace, et u_i^n et $v_{i+1/2}^{n+1/2}$ sont respectivement des approximations numériques des valeurs de u et v suivantes :

$$u_i^n \sim u(n\Delta t, i\Delta x), \quad v_{i+1/2}^{n+1/2} \sim v((n+1/2)\Delta t, (i+1/2)\Delta x).$$

Ce schéma est explicite, d'ordre deux en espace et en temps sur maillage régulier. Il est stable sous la condition de type CFL sur le nombre de Courant $\nu = c\Delta t/\Delta x$ suivante :

$$\nu \leq \nu_{Yee} \equiv 1. \quad (2)$$

Pour tout pas de temps Δt , il conserve l'énergie discrète suivante :

$$\mathcal{E}^n = \Delta x \sum_i (u_i^n u_i^n + v_{i+1/2}^{n+1/2} v_{i+1/2}^{n+1/2}).$$

Cette énergie est définie positive sous la condition (2) et assure la stabilité du schéma. Comme cette énergie est conservée exactement, le schéma n'introduit pas de diffusion numérique. Il

est néanmoins dispersif: on peut montrer qu'une onde plane de nombre d'onde k , solution numérique du schéma de Yee, est oscillante en temps avec une pulsation approchée ω_{app} donnée, quand $\Delta x \rightarrow 0$, par

$$\text{Yee-1D} \quad \frac{\omega_{app}}{\omega_{ex}} = 1 + \frac{k^2 \Delta x^2}{24} (\nu^2 - 1) + O(\Delta x^4),$$

où ω_{ex} est la pulsation de l'onde plane solution exacte de l'équation (1) et de nombre d'onde k . Elle est donnée par $\omega_{ex} = kc$. En une dimension d'espace, ce schéma est en fait exact quand $\nu = \nu_{Yee}$. Ce comportement disparaît en deux ou trois dimensions d'espace: le schéma est automatiquement dispersif, avec une dispersion d'ordre deux, même si le nombre de Courant ν est pris aussi grand que possible (à la limite de stabilité donc). Plus précisément, en trois dimensions d'espace en maillage cartésien $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$, la limite de stabilité est donnée par $c\Delta t \leq (\Delta x^{-2} + \Delta y^{-2} + \Delta z^{-2})^{-1/2}$, et la relation de dispersion est

$$\text{Yee-3D} \quad \frac{\omega_{app}}{\omega_{ex}} = 1 + \frac{k^2}{24} (c^2 \Delta t^2 - \frac{k_x^4 \Delta x^2 + k_y^4 \Delta y^2 + k_z^4 \Delta z^2}{k^4}) + O(\Delta^4),$$

où $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ est le vecteur d'onde de l'onde dispersée et $k = \|\vec{k}\|$ (on a noté $O(\Delta^4) = O(\Delta t^4, \Delta x^4, \Delta y^4, \Delta z^4)$). Pour un maillage en cubes, la dispersion maximale est atteinte pour une propagation parallèle aux axes, et, à la limite de stabilité $c\Delta t = \Delta x/\sqrt{3}$, a la même valeur que celle donnée par le schéma de Yee en 1D avec $\nu = 1/\sqrt{3}$.

On a représenté sur la Figure 1 la solution exacte et la solution approchée obtenue avec le schéma de Yee sur un maillage régulier (cas test avec solution exacte sous la forme d'un pulse se déplaçant vers la droite) pour $\nu = 1/\sqrt{3}$ et $\nu = 0.95$. La dispersion est clairement visible à $\nu = 1/\sqrt{3}$ et donne une idée du comportement du schéma de Yee en trois dimensions d'espace.

2.3 Volumes finis et schéma saute-mouton

Un schéma de type volumes finis avec flux centrés et schéma en temps de type saute-mouton (inspiré par le schéma de Yee) a été récemment proposé [8]. Ce schéma s'appuie sur le fait que les équations de Maxwell (en une, deux ou trois dimensions d'espace) prennent aussi la forme d'un système de lois de conservation. Le schéma en volumes finis qui en découle est naturellement applicable à un maillage non régulier en une dimension d'espace, et à n'importe quelle partition (finie) en plusieurs dimensions d'espace [6]. Il s'écrit :

$$\begin{cases} \Delta x_i \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \left(c \frac{v_i^{n+1/2} + v_{i+1}^{n+1/2}}{2} \right) - \left(c \frac{v_{i-1}^{n+1/2} + v_i^{n+1/2}}{2} \right) = 0, \\ \Delta x_i \frac{v_i^{n+3/2} - v_i^{n+1/2}}{\Delta t} + \left(c \frac{u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{2} \right) - \left(c \frac{u_{i-1}^{n+1} + u_i^{n+1}}{2} \right) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

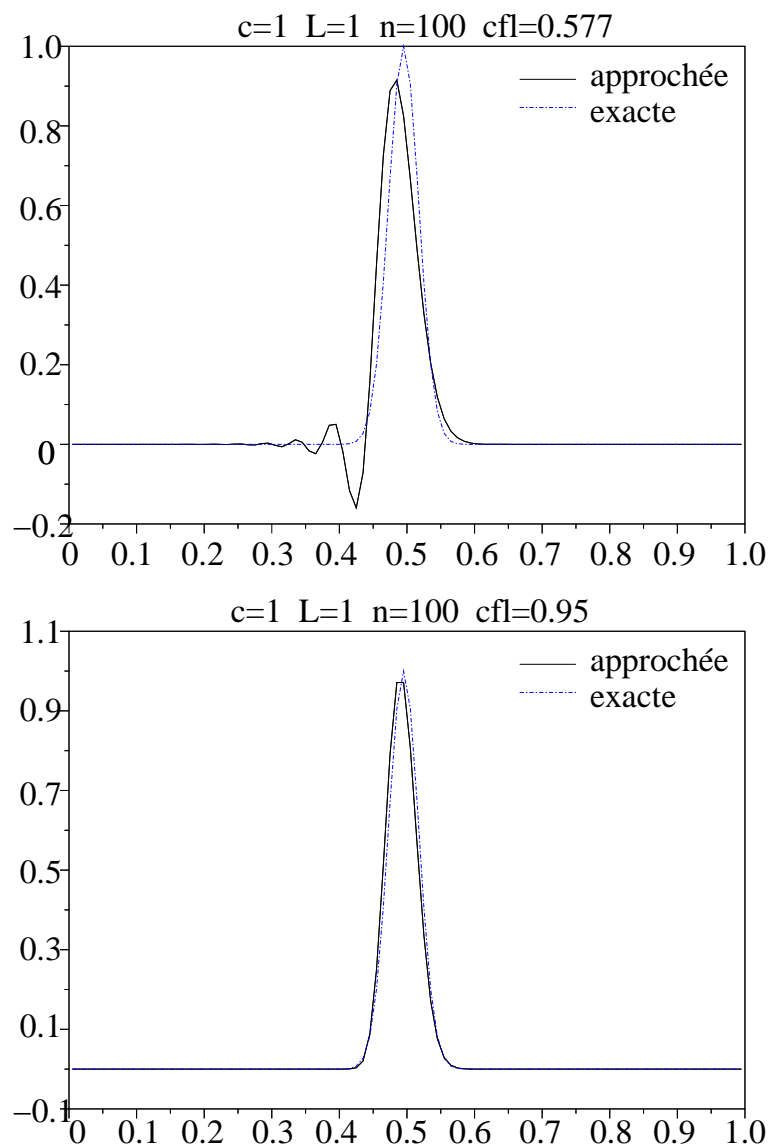


FIG. 1 – Solutions exactes et approchées - Schéma de Yee pour $\nu = 0.95$ et $\nu = 1/\sqrt{3}$.

où Δx_i est la mesure du volume fini \mathcal{V}_i et u_i^n et $v_i^{n+1/2}$ sont des approximations des valeurs moyennes de la solution exacte suivantes :

$$u_i^n \sim \frac{1}{\Delta x_i} \int_{\mathcal{V}_i} u(n\Delta t, x) dx, \quad v_i^{n+1/2} \sim \frac{1}{\Delta x_i} \int_{\mathcal{V}_i} v\left((n+1/2)\Delta t, x\right) dx.$$

Dans (3), la nature conservative du schéma en volumes finis apparaît. Les flux entre les cellules consécutives i et $i + 1$ sont complètement centrés et donnés par :

$$F_{[n,n+1]}^u [i \rightarrow i + 1] = c \frac{v_i^{n+1/2} + v_{i+1}^{n+1/2}}{2}, \quad F_{[n+1/2,n+3/2]}^v [i \rightarrow i + 1] = c \frac{u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{2}$$

Sur un maillage régulier, ce schéma explicite est équivalent à deux schémas de Yee imbriqués. Il est donc d'ordre deux en temps et en espace, stable sous la condition $\nu \leq \nu_{VF} \equiv 2$ et est sans diffusion puisqu'il conserve une énergie discrète. Toujours sur maillage régulier, ce schéma est dispersif avec la relation de dispersion suivante :

$$\frac{\omega_{app}}{\omega_{ex}} = 1 + \frac{k^2 \Delta x^2}{24} (\nu^2 - 4) + O(\Delta x^4).$$

En une dimension d'espace et sur maillage régulier, ce schéma est en fait exact quand $\nu = \nu_{VF}$. Ce comportement disparaît en trois dimensions d'espace : le schéma est automatiquement dispersif, avec une dispersion d'ordre deux, même si le nombre de Courant ν est pris aussi grand que possible. On obtient des courbes identiques à celles de la Figure 1 avec le schéma en volumes finis (3) sur un maillage régulier pour $\nu = 2/\sqrt{3}$ et $\nu = 1.9$.

Sur maillage quelconque, le schéma conserve également une énergie discrète :

$$\mathcal{E}^n = \sum_i \frac{\Delta x_i}{2} (u_i^n u_i^n + v_i^{n-1/2} v_i^{n+1/2}).$$

Cette énergie est conservée quel que soit le pas de temps Δt . Dans la suite, on définit le nombre de Courant ν pour un maillage quelconque par :

$$\nu \equiv \frac{c \Delta t}{\min_i \Delta x_i}. \quad (4)$$

La forme quadratique proposée ci-dessus est définie positive (et donc une norme, ce qui assure la stabilité) sous la condition suffisante $\nu \leq 2$. On a représenté sur la Figure 2 la solution initiale et les solutions exacte et approchée obtenues à $t = 0.5$ avec le schéma en volumes finis (3) (un pulse partant à $t = 0$ en $x = 0.25$, se déplaçant vers la droite) pour un maillage localement raffiné (il est composé de deux sous-maillages réguliers dont celui de droite est quatre fois plus fin que l'autre). On a pris $\nu = 1.9$ (voir définition (4)). Ce résultat de simulation est assez simple à interpréter : une forte onde parasite a été renvoyée par l'interface entre les deux maillages de tailles différentes (rapport quatre). D'autre part, l'onde est clairement dispersée dans le maillage grossier, puisque le pas de temps utilisé, contraint essentiellement par les petites mailles du maillage fin, donne un nombre de Courant relativement aux grosses mailles de 0.475.

On a représenté sur la Figure 3 les mêmes courbes pour un maillage aléatoire (loi uniforme sur $[h; 2h]$). On a aussi pris $\nu = 1.9$ dans la définition (4). Ce résultat de simulation

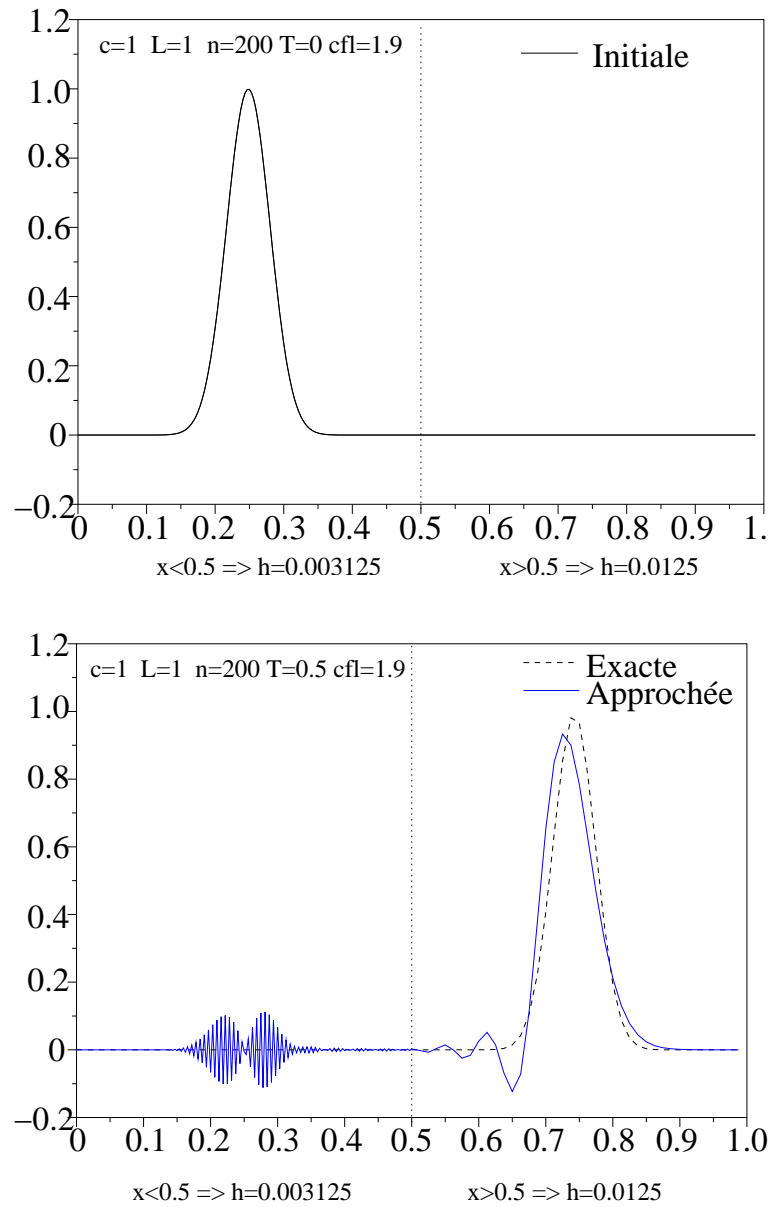


FIG. 2 – Solution initiale et solutions exacte et approchées données par le schéma en volumes finis pour $\nu = 1.9$. Maillage localement raffiné.

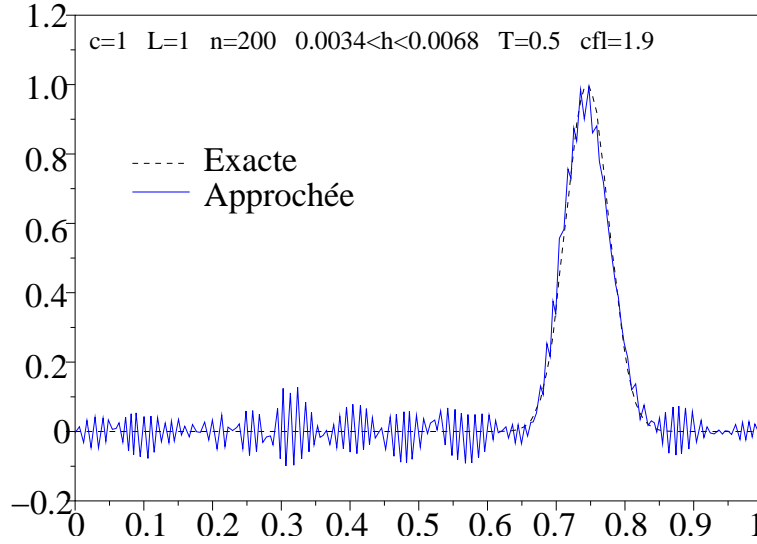


FIG. 3 – Solutions exacte et approchées données par le schéma en volumes finis pour $\nu = 1.9$. Maillage aléatoire.

s'explique par le fait que des ondes parasites dues aux différences de taille de mailles (elles sont aléatoires) successives sont émises partout, avec des intensités dépendant des rapports entre tailles des mailles successives.

2.4 Galerkin discontinu et schéma saute-mouton

Un schéma en éléments finis de type Galerkin discontinu, utilisant un schéma en temps de type saute-mouton (inspiré par le schéma de Yee) a été récemment proposé [7]. Les équations de Maxwell (en une, deux ou trois dimensions d'espace) sont écrites sous la forme d'un système de lois de conservation. Elles sont ensuite multipliées par des fonctions de base locales et intégrées dans chaque volume de contrôle (on parle donc de volumes finis de type Galerkin Discontinu). La méthode qui en découle est de nature explicite (des matrices de masse locale seulement doivent être inversées) et est naturellement applicable à un maillage non régulier en une dimension d'espace, et à n'importe quelle partition (finie) en plusieurs dimensions d'espace [7].

On choisit de présenter ici la méthode en une dimension d'espace, avec des éléments finis de type \mathbb{P}_K (avec $K \geq 0$). Chaque volume fini \mathcal{V}_i est un intervalle $[x_{i-1/2}; x_{i+1/2}]$, de mesure $\Delta x_i \equiv x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$. Dans chaque intervalle, on considère les fonction de base φ_{ik} , pour $1 \leq k \leq K + 1$ définies par

$$\varphi_{ik}(x) = \left(\frac{x - x_{i-1/2}}{\Delta x_i} \right)^{k-1}, \quad \forall x \in \mathcal{V}_i.$$

On obtient la méthode de volumes finis de type Galerkin Discontinu

- en supposant que u et v sont décomposées dans chaque volume \mathcal{V}_i sur la base des φ_{ik} ;
- en multipliant (1) par chaque φ_{ik} et en intégrant l'équation obtenue sur \mathcal{V}_i ;
- en intégrant par partie et en remplaçant les termes de bord par des flux numériques centrés (valeurs moyennes des valeurs de part et d'autre de $x_{i+1/2}$ et $x_{i-1/2}$);
- en utilisant un schéma en temps de type Yee (saute-mouton simple).

On obtient alors, en utilisant la décomposition spatiale suivante

$$\forall x \in \mathcal{V}_i, \begin{cases} u(x, t^n) &= \sum_{k=1}^{K+1} u_{ik}^n \varphi_{ik}(x), \\ v(x, t^{n+1/2}) &= \sum_{k=1}^{K+1} v_{ik}^{n+1/2} \varphi_{ik}(x), \end{cases}$$

et en notant $\mathbf{u}_i^n = (u_{i1}^n, \dots, u_{i(K+1)}^n)^t$ et $\mathbf{v}_i^{n+1/2} = (v_{i1}^{n+1/2}, \dots, v_{i(K+1)}^{n+1/2})^t$,

$$\begin{cases} \Delta x_i \mathbb{M}_K \frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{c\Delta t} + \underline{\mathbb{K}}_K \mathbf{v}_{i-1}^{n+1/2} + \mathbb{K}_K \mathbf{v}_i^{n+1/2} + \overline{\mathbb{K}}_K \mathbf{v}_{i+1}^{n+1/2} = 0, \\ \Delta x_i \mathbb{M}_K \frac{\mathbf{v}_i^{n+3/2} - \mathbf{v}_i^{n+1/2}}{c\Delta t} + \underline{\mathbb{K}}_K \mathbf{u}_{i-1}^{n+1} + \mathbb{K}_K \mathbf{u}_i^{n+1} + \overline{\mathbb{K}}_K \mathbf{u}_{i+1}^{n+1} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

où \mathbb{M}_K est une matrice locale de masse, et $\underline{\mathbb{K}}_K$, \mathbb{K}_K et $\overline{\mathbb{K}}_K$ sont des matrices locales de rigidité. Toutes les quatre sont constantes (indépendantes de l'indice i du volume de contrôle considéré) et sont données par

$$(\mathbb{M}_K)_{kk'} = \frac{1}{k + k' - 1}, \quad (\underline{\mathbb{K}}_K)_{kk'} = -\frac{\delta_{k,1}}{2}, \quad (\overline{\mathbb{K}}_K)_{kk'} = \frac{\delta_{k',1}}{2} \quad (6)$$

$$(\mathbb{K}_K)_{kk'} = \frac{k' - k}{2(k + k' - 2)} \text{ et } (\mathbb{K}_K)_{11} = 0 \quad (7)$$

On peut évidemment vérifier que pour $K = 0$, le schéma (5) est équivalent au schéma en volumes finis (3) précédemment présenté. On peut aussi vérifier aisément les propriétés suivantes :

- \mathbb{M}_K est symétrique (i.e. ${}^t\mathbb{M}_K = \mathbb{M}_K$) définie positive;
- \mathbb{K}_K est antisymétrique (i.e. ${}^t\mathbb{K}_K = -\mathbb{K}_K$);
- ${}^t\overline{\mathbb{K}}_K = -\underline{\mathbb{K}}_K$ et ${}^t\underline{\mathbb{K}}_K = -\overline{\mathbb{K}}_K$.

Sur un maillage quelconque, le schéma (5) conserve également une énergie discrète :

$$\mathcal{E}^n = \sum_i \int_{\mathcal{V}_i} \frac{1}{2} (u_i^n u_i^n + v_i^{n-1/2} v_i^{n+1/2}) = \sum_i \frac{\Delta x_i}{2} \left({}^t\mathbf{u}_i^n \mathbb{M}_K \mathbf{u}_i^n + {}^t\mathbf{v}_i^{n-1/2} \mathbb{M}_K \mathbf{v}_i^{n+1/2} \right).$$

Cette énergie est conservée quel que soit le pas de temps Δt . En effet, des calculs simples montrent que, en utilisant la notation $\mathbf{u}_i^{n+1/2} = (\mathbf{u}_i^n + \mathbf{u}_i^{n+1})/2$, et les relations précédentes sur les matrices \mathbb{M}_K , \mathbb{K}_K , $\underline{\mathbb{K}}_K$ et $\overline{\mathbb{K}}_K$, et en omettant l'indice temporel $n+1/2$, on a :

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} &= \mathcal{E}^{n+1} - \mathcal{E}^n \\ &= \sum_i \frac{\Delta x_i}{2} ({}^t \mathbf{u}_i \mathbb{M}_K (\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n) + {}^t \mathbf{v}_i \mathbb{M}_K (\mathbf{v}_i^{n+3/2} - \mathbf{v}_i^{n-1/2})) \\ &= -\frac{c\Delta t}{2} \sum_i {}^t \mathbf{u}_i \left((\underline{\mathbb{K}}_K + {}^t \overline{\mathbb{K}}_K) \mathbf{v}_{i-1} + (\mathbb{K}_K + {}^t \mathbb{K}_K) \mathbf{v}_i + (\overline{\mathbb{K}}_K + {}^t \underline{\mathbb{K}}_K) \mathbf{v}_{i+1} \right) = 0. \end{aligned}$$

On montre que l'énergie \mathcal{E}^n est une forme quadratique définie positive (et donc une norme, ce qui assure la stabilité) sous une condition suffisante de type $\nu \leq \nu_K$. On donne ici la démonstration. La matrice \mathbb{M}_K étant symétrique définie positive, elle est diagonalisable et on peut construire de manière simple sa racine carrée (également symétrique définie positive). On la note pour simplifier $\mathbb{M}_K^{\frac{1}{2}}$. On note

$$c_K = \|\mathbb{M}_K^{-\frac{1}{2}} \mathbb{K}_K \mathbb{M}_K^{-\frac{1}{2}}\|, \quad d_K = \|\mathbb{M}_K^{-\frac{1}{2}} \underline{\mathbb{K}}_K \mathbb{M}_K^{-\frac{1}{2}}\| = \|\mathbb{M}_K^{-\frac{1}{2}} \overline{\mathbb{K}}_K \mathbb{M}_K^{-\frac{1}{2}}\|, \quad (8)$$

où on a utilisé la norme canonique d'une matrice ($\forall X, \|AX\| \leq \|A\| \|X\|$). On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^n &= \sum_i \frac{\Delta x_i}{2} \left({}^t \mathbf{u}_i^n \mathbb{M}_K \mathbf{u}_i^n + {}^t \mathbf{v}_i^{n-1/2} \mathbb{M}_K \mathbf{v}_i^{n+1/2} \right) \\ &= \sum_i \frac{\Delta x_i}{2} \left(\|\mathbb{M}_K^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}_i^n\|^2 + \|\mathbb{M}_K^{\frac{1}{2}} \mathbf{v}_i^{n-1/2}\|^2 \right) - \frac{c\Delta t}{2} {}^t \mathbf{v}_i^{n-1/2} (\underline{\mathbb{K}}_K \mathbf{u}_{i-1}^n + \mathbb{K}_K \mathbf{u}_i^n + \overline{\mathbb{K}}_K \mathbf{u}_{i+1}^n) \\ &\geq \sum_i \frac{\Delta x_i}{2} \left(\|\mathbb{M}_K^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}_i^n\|^2 + \|\mathbb{M}_K^{\frac{1}{2}} \mathbf{v}_i^{n-1/2}\|^2 \right) \\ &\quad - \frac{c\Delta t}{2} \sum_i \|\mathbb{M}_K^{\frac{1}{2}} \mathbf{v}_i^{n-1/2}\| \left(d_K \|\mathbb{M}_K^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}_{i-1}^n\| + c_K \|\mathbb{M}_K^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}_i^n\| + d_K \|\mathbb{M}_K^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}_{i+1}^n\| \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_i \left(\Delta x_i - \frac{c\Delta t}{2} (c_K + 2d_K) \right) \left({}^t \mathbf{u}_i^n \mathbb{M}_K \mathbf{u}_i^n + {}^t \mathbf{v}_i^{n-1/2} \mathbb{M}_K \mathbf{v}_i^{n-1/2} \right). \end{aligned}$$

\mathcal{E}^n est bien une forme quadratique définie positive des inconnues \mathbf{u}_i^n et $\mathbf{v}_i^{n-1/2}$ sous la condition suffisante de stabilité,

$$\frac{c\Delta t}{\min_i(\Delta x_i)} \equiv \nu < \nu_K \equiv \frac{2}{c_K + 2d_K}. \quad (9)$$

Numériquement, sur maillage régulier, on trouve que les valeurs limites de stabilité pour ν_K sont proches de celles données dans la Table 1. Ces valeurs limites pour la stabilité sont assez proches de notre condition suffisante de stabilité (et toujours supérieures, ce qui n'infirmant pas le fait qu'elles soient suffisantes). On observe aussi que ces conditions sont suffisantes sur maillages non réguliers.

K	0	1	2	3	4
c_K	0	$\sqrt{3}$	2.8	4.36	6.21
d_K	0.5	$\sqrt{3}$	3.34	5.23	7.32
$\nu_K(5)$	2	0.384	0.21	0.134	0.096
$\nu_K^{\text{num.}}(5)$	2	0.5	0.24	0.15	0.1014

TAB. 1 – Valeurs de ν_K pour le schéma saute-mouton (5).

On a représenté sur la Figure 4 les solutions exacte et approchée obtenues à $t = 0.5$ avec le schéma de type Galerkin Discontinu $\mathbb{P}_1(5)$ dans le même cadre que celui des Figures 2-3 (un pulse partant à $t = 0$ en $x = 0.25$, se déplaçant vers la droite) pour un maillage localement raffiné quatre fois et maillage aléatoire (loi uniforme sur $[h; 2h]$). On a pris ici $\nu = 0.5$. Ces résultats de simulation montre la supériorité du schéma type Galerkin Discontinu \mathbb{P}_1 par rapport au schéma en volumes finis classiques (\mathbb{P}_0). Le schéma (5) fondé sur des approximations locales \mathbb{P}_1 (et a fortiori \mathbb{P}_K pour $K > 1$) ne rencontre pas de véritable difficulté, que cela soit pour un changement brusque de taille de maille, ou pour un maillage fortement hétérogène (ici aléatoire avec un rapport maximal de 2 entre mailles successives).

2.5 Galerkin discontinu et schéma saute-mouton à deux pas

Il existe une autre version du schéma saute-mouton qui a inspiré Yee. Si l'on omet la discrétisation spatiale, on peut hésiter entre les deux schémas en temps suivants, écrits formellement pour la résolution du système différentiel ordinaire

$$\begin{cases} \mathbf{x}_t = \mathbb{B}\mathbf{y}, \\ \mathbf{y}_t = \mathbb{C}\mathbf{x}, \end{cases}$$

où \mathbf{x} et \mathbf{y} sont les vecteurs dépendants du temps recherchés et \mathbb{B} et \mathbb{C} sont deux matrices données :

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^n}{\Delta t} = \mathbb{B}\mathbf{y}^{n+1/2}, \\ \frac{\mathbf{y}^{n+3/2} - \mathbf{y}^{n+1/2}}{\Delta t} = \mathbb{C}\mathbf{x}^{n+1}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^{n-1}}{2\Delta t} = \mathbb{B}\mathbf{y}^n, \\ \frac{\mathbf{y}^{n+1} - \mathbf{y}^{n-1}}{2\Delta t} = \mathbb{C}\mathbf{x}^n. \end{cases}$$

Le second schéma est en fait équivalent à une superposition de deux schémas du premier type (avec des couples de variables $(\mathbf{x}^{2n}, \mathbf{y}^{2n+1})$ et $(\mathbf{x}^{2n+1}, \mathbf{y}^{2n})$ et un pas de temps de $2\Delta t$). Le domaine de stabilité du second schéma, que nous appellerons "saute-mouton à deux pas" est donc deux fois plus petit que celui du premier. Chaque pas de temps a le même coût pour les deux schémas, de sorte que le saute-mouton à deux pas coûte exactement deux fois plus cher (il demande aussi deux fois plus de stockage).

Pour la résolution des équations de Maxwell en une dimension, en adoptant une discrétisation spatiale en volumes finis de type Galerkin Discontinu comme celle utilisée en (5),

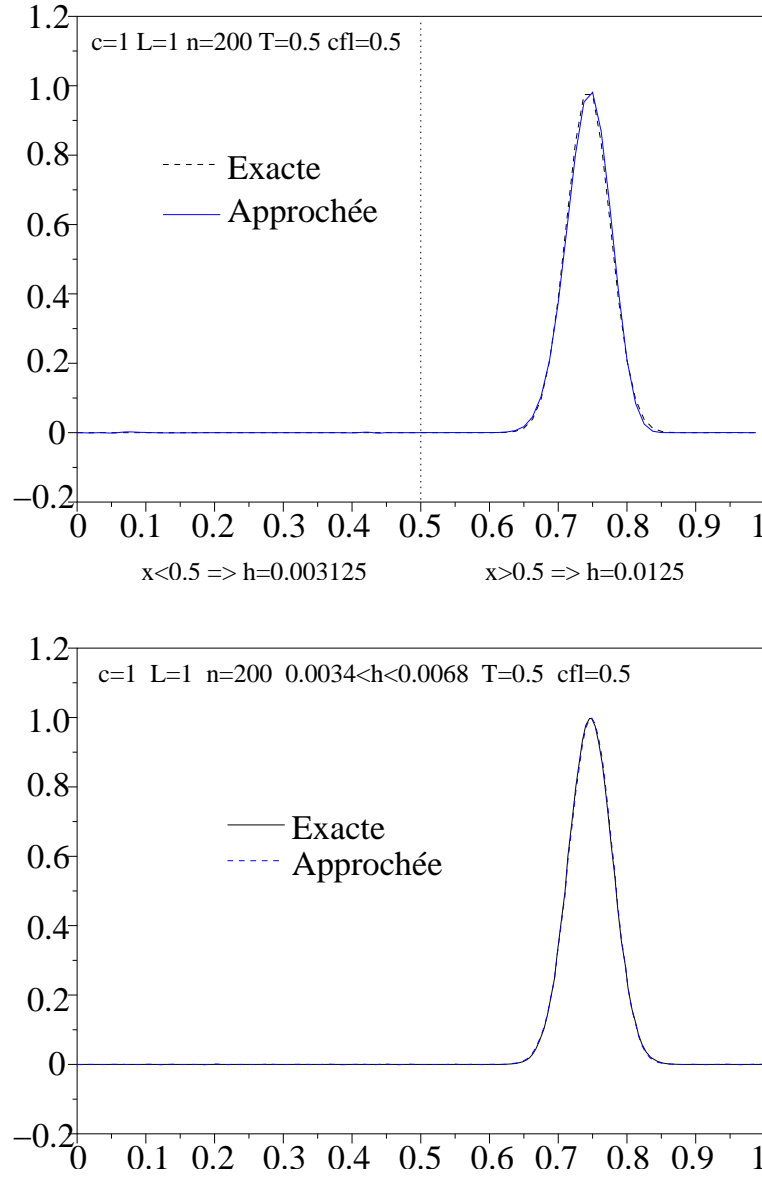


FIG. 4 – Solutions exacte et approchées données par le schéma Galerkin-Discontinu \mathbb{P}_1 pour $\nu = 0.5$. Maillage localement raffiné ou aléatoire.

K	0	1	2	3	4
$\nu_K(10)$	1.00	0.25	0.12	0.075	0.0507

TAB. 2 – Valeurs de ν_K pour le schéma saute-mouton à deux pas (10).

on obtient alors un schéma de la forme :

$$\begin{cases} \Delta x_i \mathbb{M}_K \frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^{n-1}}{2c\Delta t} + \mathbb{K}_K \mathbf{v}_{i-1}^n + \mathbb{K}_K \mathbf{v}_i^n + \overline{\mathbb{K}}_K \mathbf{v}_{i+1}^n = 0, \\ \Delta x_i \mathbb{M}_K \frac{\mathbf{v}_i^{n+1} - \mathbf{v}_i^{n-1}}{2c\Delta t} + \mathbb{K}_K \mathbf{u}_{i-1}^n + \mathbb{K}_K \mathbf{u}_i^n + \overline{\mathbb{K}}_K \mathbf{u}_{i+1}^n = 0, \end{cases} \quad (10)$$

Sur un maillage quelconque, le schéma (10) conserve également une énergie discrète :

$$\mathcal{E}^n = \sum_i \frac{\Delta x_i}{2} \left(\frac{{}^t \mathbf{u}_i^n \mathbb{M}_K \mathbf{u}_i^n + {}^t \mathbf{u}_i^{n-1} \mathbb{M}_K \mathbf{u}_i^{n+1}}{2} + \frac{{}^t \mathbf{v}_i^n \mathbb{M}_K \mathbf{v}_i^n + {}^t \mathbf{v}_i^{n-1} \mathbb{M}_K \mathbf{v}_i^{n+1}}{2} \right).$$

Cette énergie est conservée quel que soit le pas de temps Δt . Comme précédemment, on a :

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} &\equiv \mathcal{E}^{n+1} - \mathcal{E}^n \\ &= \sum_i \frac{\Delta x_i}{4} \left({}^t \mathbf{u}_i^n \mathbb{M}_K (\mathbf{u}_i^{n+2} - \mathbf{u}_i^n) + {}^t \mathbf{u}_i^{n+1} \mathbb{M}_K (\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^{n-1}) \right. \\ &\quad \left. + {}^t \mathbf{v}_i^n \mathbb{M}_K (\mathbf{v}_i^{n+2} - \mathbf{v}_i^n) + {}^t \mathbf{v}_i^{n+1} \mathbb{M}_K (\mathbf{v}_i^{n+1} - \mathbf{v}_i^{n-1}) \right) \\ &= -\frac{c\Delta t}{4} \sum_i {}^t \mathbf{u}_i^n \left((\mathbb{K}_K + {}^t \overline{\mathbb{K}}_K) \mathbf{v}_{i-1}^{n+1} + (\mathbb{K}_K + {}^t \mathbb{K}_K) \mathbf{v}_i^{n+1} + (\overline{\mathbb{K}}_K + {}^t \mathbb{K}_K) \mathbf{v}_{i+1}^{n+1} \right) \\ &\quad -\frac{c\Delta t}{4} \sum_i {}^t \mathbf{u}_i^{n+1} \left((\mathbb{K}_K + {}^t \overline{\mathbb{K}}_K) \mathbf{v}_{i-1}^n + (\mathbb{K}_K + {}^t \mathbb{K}_K) \mathbf{v}_i^n + (\overline{\mathbb{K}}_K + {}^t \mathbb{K}_K) \mathbf{v}_{i+1}^n \right) = 0. \end{aligned}$$

On montre que l'énergie \mathcal{E}^n est une forme quadratique définie positive (et donc une norme, ce qui assure la stabilité) sous une condition suffisante de type $\nu \leq \nu_K$. Numériquement, on retrouve que les limites de stabilité de ces schémas sont bien la moitié des valeurs données pour le schéma (5) données dans la Table 1. Les limites de stabilités pour le schéma "saute-mouton à deux pas" sont données dans la Table 2.

Bien que deux fois plus cher, ce schéma possède des avantages. D'abord, les inconnues ne sont pas décalées en temps. D'autre part, il est utilisable pour la résolution d'équation de convection-ondes comme celles rencontrées en aéroacoustique [1], où les flux pour chaque champ ne dépendent pas seulement de l'autre champ.

2.6 Galerkin discontinu et schéma saute-mouton d'ordre 4

On propose ici une version du schéma en temps précédent qui est d'ordre quatre et qui possède les mêmes propriétés recherchées : être explicite, stable sous une condition de type

$\nu \leq \nu_K$ et qui conserve exactement une énergie discrète, de façon qu'il ne comporte pas de diffusion numérique artificielle. Pour cela, on commence par réécrire le schéma (10) sous la forme matricielle totale :

$$\mathbf{A} \frac{\mathbf{X}^{n+1} - \mathbf{X}^{n-1}}{2c\Delta t} + \mathbf{B} \mathbf{X}^n = 0,$$

où $\mathbf{X}^n = ((\mathbf{u}_i^n)_{i=1,I}, (\mathbf{v}_i^n)_{i=1,I})$ est un vecteur colonne composé de tous les degrés de liberté, et les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} sont données par :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbf{M} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbf{K} \\ \mathbf{K} & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

où les matrices \mathbf{M} et \mathbf{K} sont elles-mêmes des matrices carrées, composées de blocs $(K+1) \times (K+1)$. \mathbf{M} est bloc diagonale, et son bloc (i,i) est $\Delta x_i \mathbb{M}_K$. \mathbf{K} est tridiagonale par blocs : son bloc (i,i) est \mathbb{K}_K , son bloc $(i,i+1)$ est $\overline{\mathbb{K}}_K$ et son bloc $(i,i-1)$ est $\underline{\mathbb{K}}_K$. On a comme propriété évidente que \mathbf{M} est symétrique et que \mathbf{K} est antisymétrique. On en déduit évidemment que \mathbf{A} est symétrique (définie positive) et que \mathbf{B} est antisymétrique.

Pour la résolution des équations de Maxwell en une dimension, on propose alors le schéma à trois pas, d'ordre quatre en temps, suivant :

$$\begin{cases} (i) & \mathbf{X}^* = \mathbf{X}^n - c\Delta t \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{X}^n, \\ (ii) & \mathbf{X}^{**} = \mathbf{X}^* + c\Delta t \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{X}^*, \\ (iii) & \mathbf{X}^{n+1} = \mathbf{X}^{n-1} - 2c\Delta t \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \left(\frac{7}{6} \mathbf{X}^n - \frac{1}{6} \mathbf{X}^{**} \right). \end{cases} \quad (11)$$

Ce schéma est effectivement d'ordre quatre. Si l'on utilise le changement de variable $\mathbf{Y} = \mathbf{A}^{1/2} \mathbf{X}$ et si l'on note $\mathbf{Z} = -c\mathbf{A}^{-1/2} \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1/2}$, il s'écrit de manière condensée $\mathbf{Y}^{n+1} = \mathbf{Y}^{n-1} + 2\Delta t (\mathbf{Z} + \frac{\Delta t^2}{6} \mathbf{Z}^3) \mathbf{Y}^n$ qui définit bien une approximation d'ordre quatre en temps du système différentiel $\mathbf{Y}_t = \mathbf{Z} \mathbf{Y}$, équivalent à $\mathbf{A} \mathbf{X}_t = -c \mathbf{B} \mathbf{X}$.

Sur un maillage quelconque, le schéma (11) conserve également l'énergie discrète définie dans le cas du schéma (10). Pour le démontrer, introduisons la matrice $\mathbf{H} = \Delta t \mathbf{Z} + \frac{\Delta t^3}{6} \mathbf{Z}^3$. On peut vérifier que \mathbf{H} est antisymétrique (\mathbf{Z} l'est puisque $\mathbf{A}^{-1/2}$ est symétrique et \mathbf{B} est antisymétrique). Il suffit alors de constater que l'énergie introduite pour le schéma (10) peut être réécrite

$$\mathcal{E}^n = \frac{{}^t \mathbf{Y}^n \mathbf{Y}^n + {}^t \mathbf{Y}^{n-1} \mathbf{Y}^{n+1}}{2}.$$

Cette énergie est conservée quel que soit le pas de temps Δt . En effet, on a :

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{{}^t \mathbf{Y}^n (\mathbf{Y}^{n+2} - \mathbf{Y}^n) + {}^t \mathbf{Y}^{n+1} (\mathbf{Y}^{n+1} - \mathbf{Y}^{n-1})}{2} = {}^t \mathbf{Y}^n \frac{\mathbf{H} + {}^t \mathbf{H}}{2} \mathbf{Y}^{n+1} = 0.$$

On montre que l'énergie \mathcal{E}^n est une forme quadratique définie positive (et donc une norme, ce qui assure la stabilité) sous une condition suffisante de type $\nu \leq \nu_K$. Numériquement, on

K	0	1	2	3	4
ν_K (11)	2.84	0.71	0.35	0.21	0.144

TAB. 3 – Valeurs de ν_K pour le schéma saute-mouton à trois pas (11).

trouve les limites de stabilité pour ces schémas (5) avec différents éléments finis discontinus \mathbb{P}_K données dans la Table 3.

En fait ces limites de stabilité ν_K sont quasiment égales à 2.84 fois les limites pour le schéma (10). Ceci n'est pas étonnant : les schémas (10) et (11) rentrent dans la catégorie des schémas s'écrivant $\mathbf{Y}^{n+1} = \mathbf{Y}^{n-1} + 2\Delta t \mathbf{G} \mathbf{Y}^n$, avec \mathbf{G} réelle antisymétrique (de valeurs propres imaginaires pures $i\mu_p$). Les vecteurs propres de \mathbf{G} sont aussi ceux de la matrice d'amplification du schéma. Si \mathbf{G} est diagonalisable, on montre que le schéma est stable si et seulement si $\max_p |\Delta t \mu_p| \leq 1$. Il est facile de faire le lien entre les valeurs propres (imaginaires pures) de $\Delta t \mathbf{Z}$ et de $\mathbf{H} = \Delta t \mathbf{Z} + \frac{\Delta t^3}{6} \mathbf{Z}^3$. On trouve alors que le schéma (11) est stable si et seulement si $r = \nu/\nu_{K(10)}$ est tel que $|r - r^3/6| \leq 1$, soit $r \leq \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} \simeq 2.84$.

En somme, le schéma (11) est un schéma d'ordre quatre en temps, qui conserve une énergie discrète et donc ne comporte pas de diffusion numérique. Pour un même maillage, chaque pas de temps coûte environ trois fois plus cher que le schéma (10), mais sa limite de stabilité (presque trois fois moins restrictive) permet de compenser son surcroît de coût. Il reste donc seulement deux fois plus coûteux que le schéma saute-mouton simple (5) pour une précision en temps bien supérieure.

2.7 Convergence des différents schémas

Nous étudions numériquement dans cette section la convergence des schémas proposés plus haut. pour chaque degré K d'éléments finis discontinus, nous avons le choix entre deux schémas : le schéma de type saute-mouton simple (5) et le schéma d'ordre quatre (11). Le schéma (10) est écarté puisqu'il est équivalent à (5) et coûte deux fois plus cher, ce qui est effectivement observé. En plus de la convergence des différents schémas (sur maillages réguliers ou non), on porte une attention particulière aux temps de calcul requis. Pour simplifier le rapport des résultats, on se limite ici, pour K fixé, au schéma en temps donnant les meilleurs résultats.

Sur maillage régulier, ces schémas peuvent être interprétés comme des schémas en différences finis, voire en éléments finis (c'est évident pour le schéma (5) avec éléments finis discontinus \mathbb{P}_0). Les simulations sont faites en utilisant l'environnement SCILAB. Les différents maillages sont obtenus en doublant plusieurs fois un maillage de base (comportant 100 points). On procède de la manière suivante :

- le maillage de $]0; 1[$ est régulier, avec conditions aux limites périodiques;
- la solution initiale est un pulse situé en 0.5, se propageant vers la droite, et la simulation est menée jusqu'en $T = 2/3$;

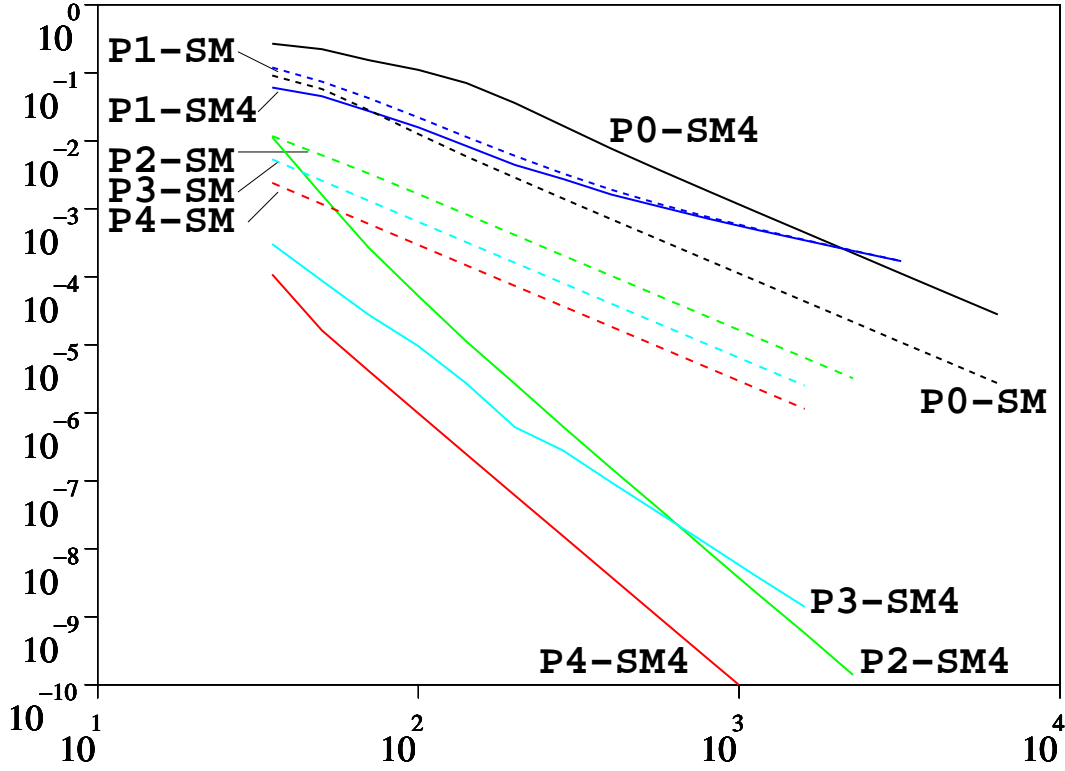


FIG. 5 – Erreur L^2 en fonction du nombre de points pour les différents schémas sur maillage régulier.

- la solution initiale est égale à la projection sur les éléments finis discontinus \mathbb{P}_K du pulse initial, de la forme $u(x) = \exp(-500 * (x - 0.5)^2)$;
- à $t = T$, on mesure la norme L^2 de la différence entre la solution obtenue (qui est \mathbb{P}_K discontinue) et la projection dans l'espace des éléments finis discontinus \mathbb{P}_K de la solution exacte;
- pour chaque schéma, on prend $\nu = \nu_K$, sauf pour le schéma (5) avec \mathbb{P}_0 (qui est alors exact), où l'on prend $\nu = 0.9$.

On obtient les courbes de convergence présentées en Figure 5. Elles indiquent clairement des ordres de convergence différents. On a calculé par régression linéaire logarithmique les ordres numériquement observés pour tous les schémas. Ils sont donnés dans la Table 4. Ces ordres de convergence peuvent être interprétés ainsi. D'abord, le schéma (5) étant d'ordre 2, l'ordre de convergence est limité à 2 pour tout K . De même, le schéma (11) étant d'ordre 4, l'ordre de convergence est limité à 4. D'autre part, il semble exister un phénomène de super-convergence pour la discrétisation en espace pour K pair (le schéma est alors d'ordre $K + 2$

K	0	1	2	3	4
(5)	2.002	1.205	2.000	2.000	2.001
(11)	2.020	1.125	4.051	2.975	3.954

TAB. 4 – *Ordres de convergence numériquement observés pour les différents schémas en maillage régulier.*

en espace). Pour K impair, le schéma est d'ordre K . Enfin, on peut prévoir que l'utilisation d'un schéma en temps d'ordre 6 et d'éléments finis discontinus \mathbb{P}_4 devrait conduire à un schéma d'ordre 6.

Sur un maillage non régulier, le comportement de ces schémas peut être assez différent. On s'attend notamment à voir disparaître toute super-convergence. On procède comme précédemment, la seule différence étant la génération du maillage : on a choisi de construire des maillages dont les tailles des mailles sont aléatoires et distribuées uniformément sur un intervalle normalisé $[1; 1.2]$. L'écart maximal entre deux mailles successives est donc de 20%. Ici, on a utilisé pour tous les schémas (y compris pour le schéma (5) avec \mathbb{P}_0) $\nu = \nu_K$ où ν est cette fois donné par (4). On obtient les courbes de convergence présentées en Figure 6. On a calculé par régression linéaire logarithmique les ordres numériquement observés pour tous les schémas. Ils sont donnés dans la Table 5. L'interprétation de ces différents ordres

K	0	1	2	3	4
(5)	0.501	1.150	2.001	2.002	2.002
(11)	0.519	1.102	2.126	3.078	4.001

TAB. 5 – *Ordres de convergence numériquement observés pour les différents schémas en maillage non régulier.*

de convergence est simple. Par rapport aux maillages réguliers, les super-convergences ont disparu. Pour tout $K > 0$, le schéma avec éléments finis discontinus \mathbb{P}_K est d'ordre K en espace (et le schéma d'ordre 2 (5) limite l'ordre de convergence global à l'ordre 2). Pour $K = 0$ (volumes finis classiques), on trouve néanmoins une convergence effective, plutôt en \sqrt{h} , ce qui est assez classique.

Comparaison des temps de calcul. Il est intéressant de comparer l'efficacité des différents schémas, puisque le trade-off entre précision et temps de calcul est crucial. On fait cette comparaison dans le cas du maillage non régulier. On peut tracer des courbes d'efficacité, donnant l'erreur numérique en fonction du temps de calcul. Celles-ci sont présentées en Figure 7. On voit qu'en une dimension d'espace, et sur maillage non régulier, les gains en temps de calcul sont considérables lorsqu'on augmente la précision des schémas en temps et en espace. En trois dimensions d'espace, ces gains sont moins clairs, car le nombre de

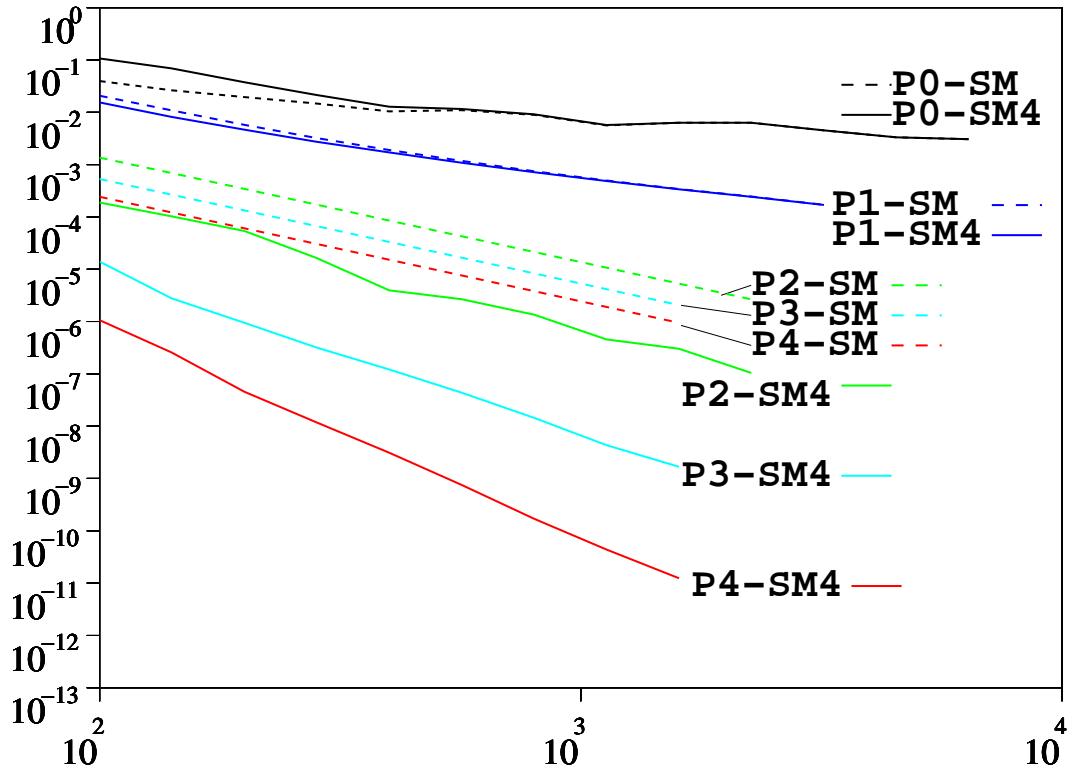


FIG. 6 – Erreur L^2 en fonction du nombre de points pour les différents schémas sur maillage non régulier.

degré de liberté augmente beaucoup plus vite avec l'ordre K . On peut cependant compléter ce paragraphe en comparant les temps de calcul bruts pour les différents schémas, sur un même maillage non régulier (à 1600 points). Ces temps de calcul totaux (obtenus avec SCILAB sur un Pentium IV 2GHz) intègrent non seulement les coûts des opérations mais aussi les différences entre les pas de temps utilisables. Ils sont présentés sur la table 6.

K	0	1	2	3	4
(5)	140	559	1204	1967	2883
(10)	281	1119	2408	3934	5767
(11)	297	1236	2607	4422	6404

TAB. 6 – Temps de calcul totaux pour les différents schémas sur un même maillage non régulier.

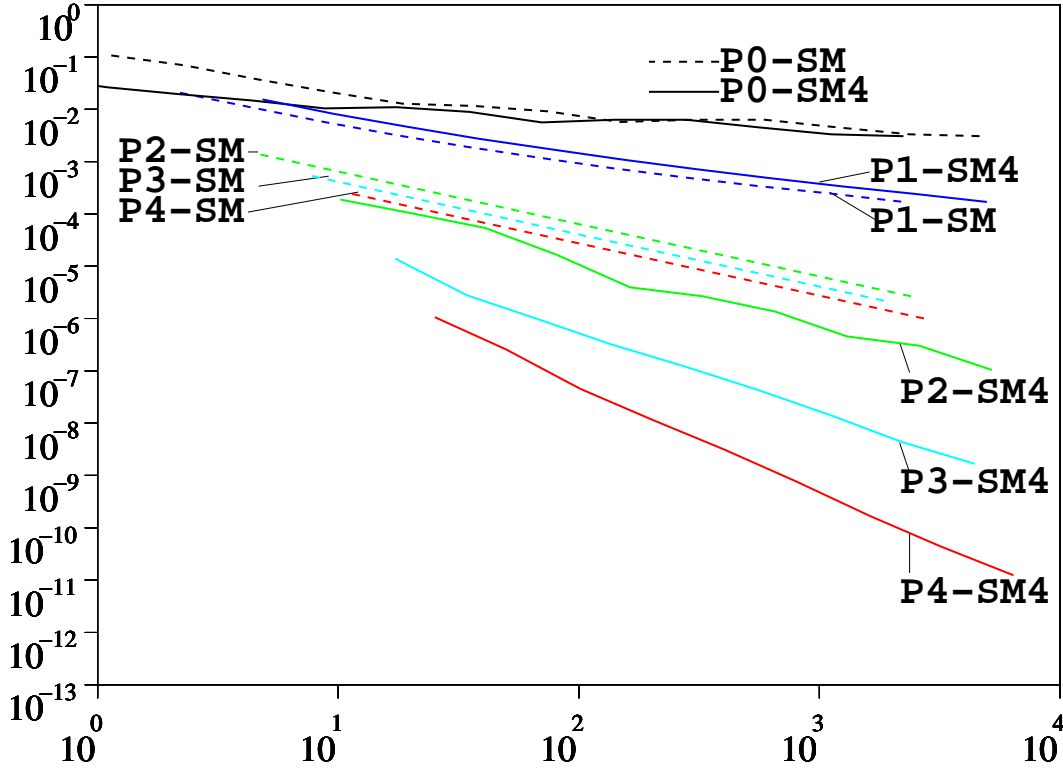


FIG. 7 – Erreur L^2 en fonction du temps de calcul pour les différents schémas sur maillage non régulier.

3 Raffinement espace-temps

Dans cette section, on étudie la possibilité d'utiliser un raffinement des discrétisations, à la fois en espace et en temps. Pour un schéma en différences finies comme le schéma de Yee, l'utilisation d'une grille localement raffinée n'est pas possible. Pour réduire le temps de calcul (par exemple pour une simulation comportant à la fois des détails très petits et un grand domaine de simulation), on peut utiliser une décomposition du domaine de calcul et adapter dans chaque sous-domaine le pas de temps pour minimiser localement la dispersion. Il reste alors à "recoller en temps" les simulations. C'est ce qui avait été fait dans la thèse de Fouquet [3], en utilisant un couplage implicite peu satisfaisant des sous-domaines.

Similairement, pour des méthodes de volumes finis ou en éléments finis discontinus – ces derniers supportant bien mieux des différences de tailles de mailles – il peut s'avérer très économique d'utiliser différents pas de temps suivant des sous-domaines, le pas de temps

étant toujours contraint par la maille la plus petite de l'ensemble du domaine à cause de la nature explicite du schéma en temps.

Dans les deux cas, la difficulté finalement est de construire un algorithme qui vérifie les propriétés suivantes :

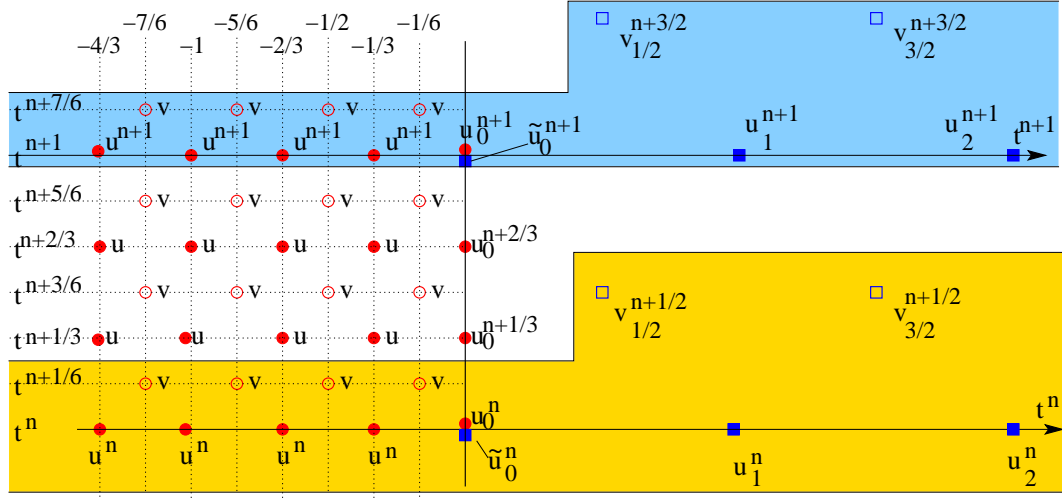
- dans chaque sous-domaine, l'algorithme se réduit à une modification très limitée du schéma initial (par exemple, seuls les points les plus proches de l'interface sont concernés); en particulier, la nature explicite du schéma de départ est conservée.
- le couplage entre sous-domaine est complètement explicite: la complexité de l'algorithme ne doit par exemple pas croître avec le nombre de sommets sur les interfaces ou le rapport entre les pas de temps utilisés de part et d'autre des interfaces.
- on doit être capable de démontrer que le schéma global est stable, sous une condition de type CFL.
- on recherchera des algorithmes conservant exactement une énergie discrète, ce qui confèrera à l'algorithme global la même propriétés que les algorithmes élémentaires utilisés.
- on cherchera enfin des algorithmes assurant une transmission aussi bonne que possible des ondes à travers les interfaces (et minimisant évidemment les réflexions parasites).

3.1 Couplage FDTD-FDTD

On cherche dans un premier temps un algorithme de couplage pour le schéma de Yee [9] utilisé sur deux sous-domaines, maillés de manière régulière: à droite de $x = 0$, on a un maillage régulier en Δx (on utilisera un pas de temps égal à $\Delta t/k$) et à gauche de $x = 0$, un maillage régulier en $\Delta x/k$ où k est un entier supérieur ou égal à 1 (on utilisera le pas de temps Δt). Plus précisément, les inconnues utilisées par l'ensemble de la méthode sont :

- $\forall n \in \mathbb{Z}/k, \forall j \in \{i/k, i \in \mathbb{Z}, i \leq -1\}$, inconnue u_j^n ;
- $\forall n \in \mathbb{Z}/k, \forall j \in \{i/k, i \in \mathbb{Z}, i \leq -1\}$, inconnue $v_{j+\frac{1}{2k}}^{n+\frac{1}{2k}}$;
- $\forall n \in \mathbb{Z}/k$, inconnue u_0^n ;
- $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall j \in \{i \in \mathbb{Z}, i \geq 1\}$, inconnue u_j^n ;
- $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall j \in \{i \in \mathbb{Z}, i \geq 0\}$, inconnue $v_{j+1/2}^{n+1/2}$;
- $\forall n \in \mathbb{Z}$, inconnue \tilde{u}_0^n .

On reconnaît les variables utilisées par les deux schémas de Yee sur chaque sous-domaine, et deux variables supplémentaires u_0^n et \tilde{u}_0^n donnant des approximations à gauche et à droite de $x = 0$. Ces inconnues sont représentées sur la Figure 8. Dans cette figure, les inconnues en rouge dépendent du maillage fin et celles en bleu du maillage grossier. Un pas de temps de l'algorithme global consiste à passer des inconnues dans la zone dorée aux inconnues dans la zone bleutée.

FIG. 8 – Placement des inconnues pour le couplage Yee-Yee (avec $k = 3$).

On propose l'algorithme suivant :

1. effectuer k pas de temps de $\Delta t/k$ avec le schéma de Yee, dans le sous-domaine raffiné, jusqu'à l'indice $j = 0$; à chaque sous-pas de temps s ($1 \leq s \leq k$), ce schéma requiert une valeur inconnue pour l'instant $\tilde{v}_{\frac{1}{2k}}^{n+\frac{2s-1}{2k}}$.
2. effectuer 1 pas de temps de Δt avec le schéma de Yee, dans le sous-domaine non raffiné, jusqu'à l'indice $j = 1/2$; ce schéma requiert l'utilisation de la valeur \tilde{u}_0^{n+1} .
3. seules les valeurs comportant un \sim ne sont pas mises à jour par un schéma de Yee; **pour que la définition du schéma soit complète, il faut préciser comment sont mises à jour ces valeurs**: $\tilde{v}_{\frac{1}{2k}}^{n+\frac{2s-1}{2k}}$ et \tilde{u}_0^n .

On considère les énergies suivantes :

$$\mathcal{F}_g^n = \frac{\Delta x}{2k} \left[\sum_{j \leq -\frac{1}{k}}^{j \in \mathbb{Z}/k} \left(u_j^{n,2} + v_{j+\frac{1}{2k}}^{n+\frac{1}{2k}} v_{j+\frac{1}{2k}}^{n-\frac{1}{2k}} \right) + (1 + \gamma) u_0^{n,2} \right], \quad (12)$$

$$\mathcal{F}_d^n = \frac{\Delta x}{2} \left[\sum_{j \geq 1} \left(u_j^{n,2} + v_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right) + \alpha \tilde{u}_0^{n,2} \right], \quad (13)$$

où γ et α sont deux paramètres fixes à déterminer. On cherche à calculer les variations de ces énergies $\Delta \mathcal{F}_g = \mathcal{F}_g^{n+1} - \mathcal{F}_g^n$ et $\Delta \mathcal{F}_d = \mathcal{F}_d^{n+1} - \mathcal{F}_d^n$ au cours d'un pas de l'algorithme proposé ci-dessus. En utilisant des résultats classiques de variation d'énergie pour le schéma

de Yee, on montre que :

$$\begin{aligned}\Delta \mathcal{F}_g &= -\frac{c\Delta t}{k} \sum_{s=1}^k \left(\frac{u_0^{n+\frac{s-1}{k}} + u_0^{n+\frac{s}{k}}}{2} \right) \tilde{v}_{\frac{1}{2k}}^{n+\frac{2s-1}{2k}} + \frac{\gamma\Delta x}{2k} \left(u_0^{n+1/2} - u_0^{n/2} \right), \\ \Delta \mathcal{F}_d &= c\Delta t \frac{\tilde{u}_0^n + \tilde{u}_0^{n+1}}{2} v_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\alpha\Delta x}{2} \left(\tilde{u}_0^{n+1/2} - \tilde{u}_0^{n/2} \right).\end{aligned}$$

Ces variations peuvent aussi se réécrire, en utilisant $\nu = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$:

$$\begin{aligned}\Delta \mathcal{F}_g &= -\frac{c\Delta t}{k} \sum_{s=1}^k \left(\frac{u_0^{n+\frac{s-1}{k}} + u_0^{n+\frac{s}{k}}}{2} \right) \left(\tilde{v}_{\frac{1}{2k}}^{n+\frac{2s-1}{2k}} - \frac{\gamma}{\nu} (u_0^{n+\frac{s}{k}} - u_0^{n+\frac{s-1}{k}}) \right), \\ \Delta \mathcal{F}_d &= c\Delta t \left(\frac{\tilde{u}_0^n + \tilde{u}_0^{n+1}}{2} \right) \left(v_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\alpha}{\nu} (\tilde{u}_0^{n+1} - \tilde{u}_0^n) \right).\end{aligned}$$

On propose de prendre \tilde{u}_0^{n+1} et $\tilde{v}_{\frac{1}{2k}}^{n+\frac{2s-1}{2k}}$ ($1 \leq s \leq k$) tels que

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{v}_{\frac{1}{2k}}^{n+\frac{2s-1}{2k}} &= v_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{2\alpha}{\nu} \tilde{u}_0^n + \frac{\gamma}{\nu} \left(u_0^{n+\frac{s}{k}} - u_0^{n+\frac{s-1}{k}} \right) \\ &\quad + \frac{2\alpha}{k\nu} \left[2 \sum_{t=1}^{s-1} \left(\frac{u_0^{n+\frac{t-1}{k}} + u_0^{n+\frac{t}{k}}}{2} \right) + \left(\frac{u_0^{n+\frac{s-1}{k}} + u_0^{n+\frac{s}{k}}}{2} \right) \right], \\ \frac{\tilde{u}_0^n + \tilde{u}_0^{n+1}}{2} &= \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k \left(\frac{u_0^{n+\frac{s-1}{k}} + u_0^{n+\frac{s}{k}}}{2} \right) \end{aligned} \right. \quad (14)$$

Il faut noter que chaque définition d'une valeur $\tilde{v}_{\frac{1}{2k}}^{n+\frac{2s-1}{2k}}$ est implicite, et demande donc la résolution d'un système linéaire **local** (ici de taille 1×1), puisque le calcul par le schéma de Yee de $u_0^{n+\frac{s}{k}}$ utilise cette valeur. On peut vérifier que les valeurs $\tilde{v}_{\frac{1}{2k}}^{n+\frac{2s-1}{2k}}$ sont bien définies : la première équation dans (14) est en fait équivalente à :

$$(1 + \gamma + \frac{\alpha}{k}) \tilde{v}_{\frac{1}{2k}}^{n+\frac{2s-1}{2k}} = v_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{2\alpha}{\nu} \tilde{u}_0^n + (\gamma + \frac{\alpha}{k}) v_{\frac{1}{2k}}^{n+\frac{2s-1}{2k}} + \frac{2\alpha}{k\nu} \left[2 \sum_{t=1}^{s-1} \left(\frac{u_0^{n+\frac{t-1}{k}} + u_0^{n+\frac{t}{k}}}{2} \right) + u_0^{n+\frac{s-1}{k}} \right].$$

On se souviendra donc de la contrainte souhaitable suivante : $1 + \gamma + \alpha/k \neq 0$. Pour les choix proposés en (14), on a :

$$\begin{aligned}\Delta \mathcal{F}_g &= \left(2\alpha\Delta x \tilde{u}_0^n - c\Delta t v_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) \frac{\tilde{u}_0^n + \tilde{u}_0^{n+1}}{2} \\ &\quad - \frac{2\alpha\Delta x}{k^2} \sum_{s=1}^k \left(\frac{u_0^{n+\frac{s-1}{k}} + u_0^{n+\frac{s}{k}}}{2} \right) \left[2 \sum_{t=1}^{s-1} \left(\frac{u_0^{n+\frac{t-1}{k}} + u_0^{n+\frac{t}{k}}}{2} \right) + \left(\frac{u_0^{n+\frac{s-1}{k}} + u_0^{n+\frac{s}{k}}}{2} \right) \right] \\ &= \left(2\alpha\Delta x \tilde{u}_0^n - c\Delta t v_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) \frac{\tilde{u}_0^n + \tilde{u}_0^{n+1}}{2} - 2\alpha\Delta x \left(\frac{\tilde{u}_0^n + \tilde{u}_0^{n+1}}{2} \right)^2 = -\Delta \mathcal{F}_d.\end{aligned}$$

L'énergie totale $\mathcal{F}^n \equiv \mathcal{F}_g^n + \mathcal{F}_d^n$ est donc conservée. On a bien conservé la nature non dissipative des deux schémas de Yee utilisés. Il reste à voir sous quelle condition suffisante sur Δt l'énergie totale \mathcal{F}^n est une forme quadratique définie positive de toutes les inconnues numériques. Ainsi, on aurait montré que le schéma couplé proposé en (14) est stable. On a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_g^n &= \frac{\Delta x}{2k} \sum_{j \leq -\frac{1}{k}}^{j \in \mathbb{Z}/k} \left(u_j^{n^2} + v_{j+\frac{1}{2k}}^{n+\frac{1}{2k}} v_{j+\frac{1}{2k}}^{n-\frac{1}{2k}} \right) + \frac{(1+\gamma)\Delta x}{2k} u_0^{n^2} \\
&= \frac{\Delta x}{2k} \sum_{j \leq -\frac{1}{k}}^{j \in \mathbb{Z}/k} \left(u_j^{n^2} + v_{j+\frac{1}{2k}}^{n-\frac{1}{2k}}{}^2 - \nu v_{j+\frac{1}{2k}}^{n-\frac{1}{2k}} (u_{j+\frac{1}{k}}^n - u_j^n) \right) + \frac{(1+\gamma)\Delta x}{2k} u_0^{n^2} \\
&\geq \frac{\Delta x}{2k} \sum_{j \leq -\frac{1}{k}}^{j \in \mathbb{Z}/k} \left(u_j^{n^2} + (1-\nu) v_{j+\frac{1}{2k}}^{n-\frac{1}{2k}}{}^2 - \frac{\nu}{2} (u_{j+\frac{1}{k}}^{n^2} + u_j^{n^2}) \right) + \frac{(1+\gamma)\Delta x}{2k} u_0^{n^2} \\
&= \frac{\Delta x}{2k} (1-\nu) \left[\sum_{j \leq -\frac{1}{k}}^{j \in \mathbb{Z}/k} \left(u_j^{n^2} + v_{j+\frac{1}{2k}}^{n-\frac{1}{2k}}{}^2 \right) + \frac{1}{2} u_0^{n^2} \right] + \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) \frac{\Delta x}{2k} u_0^{n^2} \\
&= \frac{\Delta x}{2k} (1-\nu) \left[\sum_{j \leq -\frac{1}{k}}^{j \in \mathbb{Z}/k} u_j^{n^2} + v_{j+\frac{1}{2k}}^{n-\frac{1}{2k}}{}^2 \right] + \left(1 + \gamma - \frac{\nu}{2} \right) \frac{\Delta x}{2k} u_0^{n^2}.
\end{aligned}$$

Similairement, on a du côté du maillage non raffiné :

$$\mathcal{F}_d^n \geq \frac{\Delta x}{2} (1-\nu) \left[\sum_{j \geq 1} u_j^{n^2} + v_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}{}^2 \right] + \left(\alpha - \frac{\nu}{2} \right) \frac{\Delta x}{2} \tilde{u}_0^{n^2}.$$

Si $\nu < 1$, et si $\alpha > \nu/2$ et $1 + \gamma > \nu/2$, alors le schéma couplé (14) est stable. En effet, \mathcal{F}^n étant constante, donc bornée, les minoration précédentes impliquent que toutes les variables numériques sont bornées, sauf les variables auxiliaires $\tilde{v}_{\frac{1}{2k}}^{n+\frac{2s-1}{2k}}$ définies en (14). En fait ces variables peuvent s'écrire explicitement en fonction des autres variables. Elles sont donc elles-mêmes bornées. En somme, le schéma proposé est stable sous les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \nu < 1, \\ \alpha > \nu/2, \\ 1 + \gamma > \nu/2, \\ 1 + \gamma + \alpha/k \neq 0. \end{cases} \quad (15)$$

On peut remarquer aussi que, si u_0^n et \tilde{u}_0^n sont deux approximations de u au point central $x = 0$, l'énergie globale \mathcal{F} est une approximation consistante de l'énergie totale si de plus $(1 + \gamma) \frac{\Delta x}{k} + \alpha \Delta x = \frac{\Delta x}{2k} + \frac{\Delta x}{2}$. On recherchera donc en priorité une combinaison vérifiant aussi

$$(\gamma + 1/2) + k(\alpha - 1/2) = 0. \quad (16)$$

Une solution particulièrement intuitive consiste à prendre $(\alpha, \gamma) = (1/2, -1/2)$ avec $\nu < 1$. Elle vérifie les conditions de stabilité (15) et la relation de consistance (16).

On a représenté sur la Figure 9 les solutions approchées obtenues à $t = 0$, $t = 0.25$ et

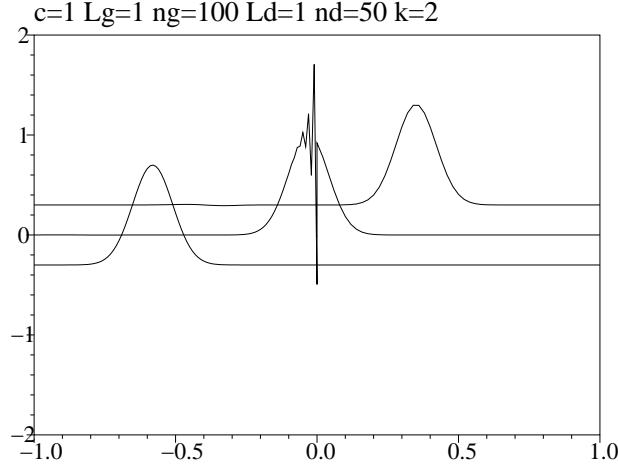
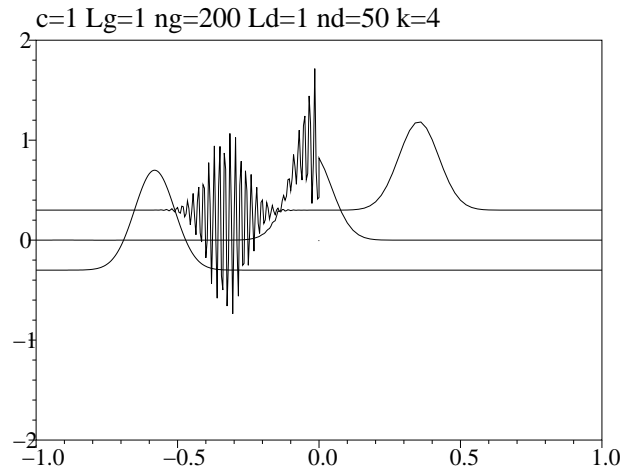
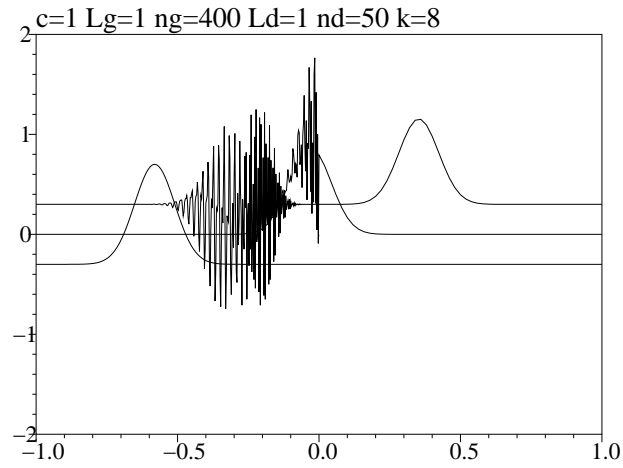


FIG. 9 – Solutions approchées - couplage Yee-Yee avec $k=2$ et $\nu = 0.95$.

$t = 0.5$ avec le schéma de couplage proposé ci-dessus pour les valeurs $\gamma = -1/2$ et $\alpha = 1/2$ (pour des raisons de lisibilité, les courbes ont été décalées verticalement artificiellement). Le maillage est localement raffiné à gauche, avec $k = 2$. On a utilisé $\nu = 0.95$. On observe numériquement que le schéma est stable, que l'énergie se conserve exactement et qu'une onde parasite locale apparaît à l'interface des deux maillages. Cette onde disparaît quand l'onde de départ est passée et une onde parasite est réfléchiée par l'interface du maillage avec une amplitude de l'ordre du centième de l'onde incidente. On a représenté sur la Figure 10 les solutions approchées correspondantes toujours pour les valeurs $\gamma = -1/2$ et $\alpha = 1/2$, cette fois avec $k = 4$ (on a toujours $\nu = 0.95$). On observe numériquement que le schéma est stable, que l'énergie se conserve exactement et qu'une onde parasite locale apparaît à l'interface des deux maillages, puis disparaît. D'autre part, une onde parasite est réfléchiée par l'interface du maillage avec une énergie importante (de l'ordre du quart!). Similairement, pour $k = 8$, les mêmes phénomènes sont observés (voir Figure 11). Signalons enfin que des résultats similaires sont aussi produits pour k impairs (la parité de k sera cruciale dans les couplages d'autres méthodes).

En somme, on a réussi dans cette partie à démontrer que le raffinement espace-temps pour le schéma de Yee est possible, sans résolution implicite (à plus d'un niveau en temps), donc à complexité constante, indépendante du nombre de mailles ou du coefficient de raffinement k . Plus précisément, le schéma de couplage proposé est stable et conserve une

FIG. 10 – Solutions approchées - couplage Yee-Yee avec $k=4$ et $\nu = 0.95$.FIG. 11 – Solutions approchées - couplage Yee-Yee avec $k=8$ et $\nu = 0.95$.

énergie électromagnétique global. Malheureusement, le schéma de Yee, avec ses approximations ponctuelles décalées en temps et en espace, ne se prête pas facilement à ce genre de manipulation, et on retrouve en substance les résultats de Fouquet [3] sur l'applicabilité du raffinement espace-temps essentiellement pour $k = 2$.

3.2 Couplage entre formulations en volumes finis

On cherche maintenant un algorithme de couplage pour le schéma de type volumes finis (3) utilisé sur deux sous-domaines, maillés de manière régulière : à droite de $x = 0$, on a un maillage régulier en Δx_d (on utilisera un pas de temps égal à $\Delta t_d = \Delta t$) et à gauche de $x = 0$, un maillage régulier en Δx_g (on utilisera un pas de temps $\Delta t_g = \Delta t/k$, où k est un entier supérieur ou égal à 1). Cette fois, les inconnues sont collocalisées en espace, le schéma en temps étant toujours de type saute-mouton. Les inconnues utilisées par l'ensemble de la méthode sont désormais :

- $\forall n \in \mathbb{Z}/k, \forall j \in \mathbb{Z}, j \leq g$, inconnues u_j^n et $v_j^{n+1/2k}$,
- $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall j \in \mathbb{Z}, j \geq d$, inconnues u_j^n et $v_j^{n+1/2}$,

On reconnaît les variables utilisées par les deux schémas de type volumes finis sur chaque sous-domaine, chacun étant partitionné en volumes finis. Ces inconnues sont représentées sur la Figure 12. On y a également représenté les limites des volumes finis dans chaque sous-domaine (limites en espace, rouges et bleues). Dans cette figure, les inconnues en rouge

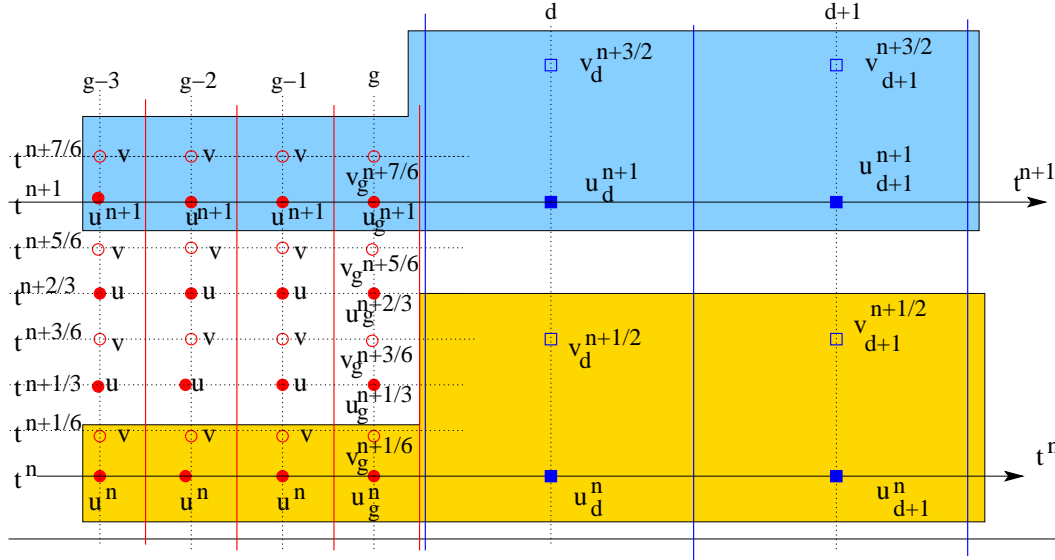


FIG. 12 – Placement des inconnues pour le couplage VF-VF (avec $k = 3$).

dépendent du maillage fin et celles en bleu du maillage grossier. Un pas de temps de l'algo-

l'algorithme global consiste à passer des inconnues dans la zone dorée aux inconnues dans la zone bleutée.

On propose l'algorithme suivant :

1. effectuer k pas de temps de $\Delta t/k$ avec le schéma en volumes finis dans le sous-domaine raffiné à gauche (maillé en Δx_g), jusqu'à l'indice $j = g$; à chaque sous-pas de temps s ($1 \leq s \leq k$), ce schéma requiert des valeurs inconnues pour l'instant $\tilde{v}_{g+1}^{n+\frac{2s-1}{2k}}$ et $\tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{s}{k}}$.
2. effectuer 1 pas de temps de Δt avec le schéma en volumes finis dans le sous-domaine non raffiné à droite (maillé en Δx_d), à partir de l'indice $j = d$; ce schéma requiert l'utilisation de valeurs inconnues pour l'instant \tilde{u}_{d-1}^{n+1} et $\tilde{v}_{d-1}^{n+\frac{3}{2}}$.
3. seules les valeurs comportant un \sim ne sont pas mises à jour par un schéma en volumes finis; **pour que la définition du schéma soit complète, il faut préciser comment sont mises à jour ces valeurs.**

On considère les énergies suivantes :

$$\mathcal{F}_g^n = \frac{\Delta x_g}{2} \left[\sum_{j \leq g-1} \left(u_j^{n,2} + v_j^{n+\frac{1}{2k}} v_j^{n-\frac{1}{2k}} \right) + \frac{u_g^{n,2}}{2} + \frac{\tilde{u}_{g+1}^{n,2}}{2} + v_g^{n+\frac{1}{2k}} v_g^{n-\frac{1}{2k}} \right], \quad (17)$$

$$\mathcal{F}_d^n = \frac{\Delta x_d}{2} \left[\sum_{j \geq d+1} \left(u_j^{n,2} + v_j^{n+\frac{1}{2}} v_j^{n-\frac{1}{2}} \right) + \frac{u_d^{n,2}}{2} + \frac{\tilde{u}_{d-1}^{n,2}}{2} + v_d^{n+\frac{1}{2}} v_d^{n-\frac{1}{2}} \right]. \quad (18)$$

Ces énergies ont été choisies pour assurer la stabilité des schémas. Elles font intervenir les variables annexes (avec \sim) dont on ne peut pas se débarrasser. On cherchera par la suite à démontrer que l'énergie globale se conserve, donc est bornée, donc toutes les variables intervenant dans ces énergies le seront également (à condition que l'énergie globale soit une fonction de Lyapunov de toutes les inconnues numériques). On a les résultats suivants :

$$\mathcal{F}_g^n \geq \frac{\Delta x_g}{2} \left(1 - \frac{c\Delta t}{2k\Delta x_g} \right) \left[\sum_{j \leq g} v_j^{n-\frac{1}{2k}}^2 + \sum_{j \leq g-1} u_j^{n,2} + \frac{u_g^{n,2}}{2} + \frac{\tilde{u}_{g+1}^{n,2}}{2} \right]. \quad (19)$$

Similairement, on a du côté du maillage non raffiné :

$$\mathcal{F}_d^n \geq \frac{\Delta x_d}{2} \left(1 - \frac{c\Delta t}{2\Delta x_d} \right) \left[\sum_{j \geq d} v_j^{n-\frac{1}{2}}^2 + \sum_{j \geq d+1} u_j^{n,2} + \frac{u_d^{n,2}}{2} + \frac{\tilde{u}_{d-1}^{n,2}}{2} \right]. \quad (20)$$

Si $c\Delta t < 2 \min(k\Delta x_g, \Delta x_d)$, alors l'énergie totale $\mathcal{F}_g^n + \mathcal{F}_d^n$ est clairement une forme quadratique définie positive des inconnues numériques en jeu : $(u_j^n)_{j \leq g}$, $(v_j^{n-1/2k})_{j \leq g}$, $(u_j^n)_{j \geq d}$, $(v_j^{n-1/2})_{j \geq d}$, \tilde{u}_{g+1}^n et \tilde{u}_{d-1}^n .

On cherche maintenant à calculer les variations de ces énergies $\Delta \mathcal{F}_g = \mathcal{F}_g^{n+1} - \mathcal{F}_g^n$ et $\Delta \mathcal{F}_d = \mathcal{F}_d^{n+1} - \mathcal{F}_d^n$ au cours d'un pas de l'algorithme proposé ci-dessus. En utilisant des

résultats classiques de variation d'énergie pour le schéma en volumes finis, on montre que :

$$\begin{aligned}\Delta \mathcal{F}_g &= \frac{\Delta x_g}{2} \sum_{s=1}^k \left[\frac{\tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{s-1}{k}} + \tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{s}{k}}}{2} \left(\tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{s}{k}} - \tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{s-1}{k}} - \frac{c\Delta t}{k\Delta x_g} v_g^{n+\frac{2s-1}{2k}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{u_g^{n+\frac{s-1}{k}} + u_g^{n+\frac{s}{k}}}{2} \left(u_g^{n+\frac{s}{k}} - u_g^{n+\frac{s-1}{k}} + \frac{c\Delta t}{k\Delta x_g} \tilde{v}_{g+1}^{n+\frac{2s-1}{2k}} \right) \right], \\ \Delta \mathcal{F}_d &= \frac{\Delta x_d}{2} \left[\frac{\tilde{u}_{d-1}^n + \tilde{u}_{d-1}^{n+1}}{2} \left(\tilde{u}_{d-1}^{n+1} - \tilde{u}_{d-1}^n + \frac{c\Delta t}{\Delta x_d} v_d^{n+\frac{1}{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{u_d^n + u_d^{n+1}}{2} \left(u_d^{n+1} - u_d^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x_d} \tilde{v}_{d-1}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right].\end{aligned}$$

On propose les notations suivantes :

$$\begin{cases} A^s = \frac{u_g^{n+\frac{s-1}{k}} + u_g^{n+\frac{s}{k}}}{2}, & B^s = \frac{k\Delta x_g}{c\Delta t} \left(u_g^{n+\frac{s}{k}} - u_g^{n+\frac{s-1}{k}} \right) + \tilde{v}_{g+1}^{n+\frac{2s-1}{2k}}, \\ \tilde{A}^s = \frac{\tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{s-1}{k}} + \tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{s}{k}}}{2}, & \tilde{B}^s = -\frac{k\Delta x_g}{c\Delta t} \left(\tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{s}{k}} - \tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{s-1}{k}} \right) + v_g^{n+\frac{2s-1}{2k}}, \\ A = \frac{u_d^n + u_d^{n+1}}{2}, & B = -\frac{\Delta x_d}{c\Delta t} (u_d^{n+1} - u_d^n) + \tilde{v}_{d-1}^{n+\frac{1}{2}}, \\ \tilde{A} = \frac{\tilde{u}_{d-1}^n + \tilde{u}_{d-1}^{n+1}}{2}, & \tilde{B} = \frac{\Delta x_d}{c\Delta t} (\tilde{u}_{d-1}^{n+1} - \tilde{u}_{d-1}^n) + v_d^{n+\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (21)$$

Avec ces notations, on a plus simplement :

$$\begin{aligned}\Delta \mathcal{F}_g &= -\frac{c\Delta t}{2} \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k [\tilde{A}^s \tilde{B}^s + A^s B^s], \\ \Delta \mathcal{F}_d &= \frac{c\Delta t}{2} [\tilde{A}\tilde{B} + AB].\end{aligned}$$

3.2.1 Première famille d'algorithmes

On se propose de construire un algorithme de couplage explicite vérifiant systématiquement

$$\frac{1}{k} \sum_{s=1}^k \tilde{A}^s \tilde{B}^s = AB, \quad \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k A^s B^s = \tilde{A}\tilde{B}.$$

Ainsi, on aura bien $\Delta\mathcal{F}_g + \Delta\mathcal{F}_d \equiv 0$. Pour cela, on utilise : $\forall(\alpha, \alpha', \gamma, \gamma')$,

$$\frac{1}{k} \sum_{s=1}^k \tilde{A}^s \tilde{B}^s = AB \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k \tilde{B}^s, \tilde{A}^s = A - \alpha B + \frac{\alpha}{k} (2\tilde{B}^1 + \dots + 2\tilde{B}^{s-1} + \tilde{B}^s) \\ \text{ou} \\ A = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k \tilde{A}^s, \tilde{B}^s = B - \alpha' A + \frac{\alpha'}{k} (2\tilde{A}^1 + \dots + 2\tilde{A}^{s-1} + \tilde{A}^s) \end{cases}$$

$$\frac{1}{k} \sum_{s=1}^k A^s B^s = \tilde{A} \tilde{B} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{B} = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k B^s, A^s = \tilde{A} - \gamma \tilde{B} + \frac{\gamma}{k} (2B^1 + \dots + 2B^{s-1} + B^s) \\ \text{ou} \\ \tilde{A} = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k A^s, B^s = \tilde{B} - \gamma' \tilde{A} + \frac{\gamma'}{k} (2A^1 + \dots + 2A^{s-1} + A^s) \end{cases}$$

On peut vérifier que ces formules donnent naissance à quatre algorithmes de couplage différents, correspondants aux deux fois deux choix proposés ci-dessus, que nous nommerons $\alpha\gamma$, $\alpha'\gamma$, $\alpha\gamma'$ et $\alpha'\gamma'$. On peut montrer que ces algorithmes sont réellement explicites (et donc implémentables) si on choisit $\alpha = \nu_d/2$, $\gamma = \nu_d/2$, $\alpha' = 2/\nu_d$ et $\gamma' = 2/\nu_d$ (on a noté $\nu_d = c\Delta t/\Delta x_d$).

Algorithme $\alpha\gamma$

Étape 0. On dispose de $(u_j^n)_{j \leq g}$, $(v_j^{n+\frac{1}{2k}})_{j \leq g}$, $(u_j^n)_{j \geq d}$, $(v_j^{n+1/2})_{j \geq d}$, \tilde{u}_{g+1}^n et \tilde{u}_{d-1}^n .

Étape 1. On veut avancer le champ u à gauche, de $\Delta t/k$. Pour cela, on a besoin de $\tilde{v}_{g+1}^{n+\frac{1}{2k}}$. On a les équations suivantes :

$$\begin{cases} u_g^{n+\frac{1}{k}} = u_g^n - \frac{c\Delta t}{2k\Delta x_g} (\tilde{v}_{g+1}^{n+\frac{1}{2k}} - v_{g-1}^{n+\frac{1}{2k}}), \\ \frac{1}{2}(u_g^n + u_g^{n+\frac{1}{k}}) \equiv A^1 = \tilde{A} - \gamma \tilde{B} + \frac{\gamma}{k} B^1, \\ B^1 = \frac{k\Delta x_g}{c\Delta t} (u_g^{n+\frac{1}{k}} - u_g^n) + \tilde{v}_{g+1}^{n+\frac{1}{2k}}, \\ \tilde{A} - \gamma \tilde{B} = (\frac{1}{2} - \gamma \frac{\Delta x_d}{c\Delta t}) \tilde{u}_{d-1}^{n+1} + (\frac{1}{2} + \gamma \frac{\Delta x_d}{c\Delta t}) \tilde{u}_{d-1}^n - \gamma v_d^{n+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

La première et la troisième montrent que B^1 et $u_g^{n+\frac{1}{k}}$ peuvent s'écrire en fonction de variables connues et de $\tilde{v}_{g+1}^{n+\frac{1}{2k}}$. La deuxième est une équation implicite pour $\tilde{v}_{g+1}^{n+\frac{1}{2k}}$, où tout est connu, sauf $\tilde{A} - \gamma \tilde{B}$, qui est calculable seulement si $\gamma = \nu_d/2$ (car \tilde{u}_{d-1}^{n+1} est inconnu et sera calculé seulement à la fin des k sous-pas de temps). Il reste à vérifier que l'équation implicite pour $\tilde{v}_{g+1}^{n+\frac{1}{2k}}$ est bien soluble. Elle s'écrit :

$$\left(\frac{c\Delta t}{4k\Delta x_g} + \frac{c\Delta t}{4k\Delta x_d} \right) \tilde{v}_{g+1}^{n+\frac{1}{2k}} = u_g^n - \tilde{u}_{d-1}^n + \frac{\nu_d}{2} v_d^{n+\frac{1}{2}} + \left(\frac{c\Delta t}{4k\Delta x_g} - \frac{c\Delta t}{4k\Delta x_d} \right) v_{g-1}^{n+\frac{1}{2k}}. \quad (22)$$

Étape 2. On veut avancer le champ v à gauche, de $\Delta t/k$. Pour cela, on a besoin de $\tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{1}{k}}$. On a les équations suivantes :

$$\begin{cases} u_d^{n+1} = u_d^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x_d}(v_{d+1}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{v}_{d-1}^{n+\frac{1}{2}}), \\ \frac{1}{2}(\tilde{u}_{g+1}^n + \tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{1}{k}}) \equiv \tilde{A}^1 = A - \alpha B + \frac{\alpha}{k}\tilde{B}^1, \\ \tilde{B}^1 = -\frac{k\Delta x_g}{c\Delta t}(\tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{1}{k}} - \tilde{u}_{g+1}^n) + v_g^{n+\frac{1}{2k}}, \\ A - \alpha B = (-\frac{\alpha}{2} - \frac{c\Delta t}{4\Delta x_d})v_{d+1}^{n+\frac{1}{2}} + (-\frac{\alpha}{2} + \frac{c\Delta t}{4\Delta x_d})\tilde{v}_{d-1}^{n+\frac{1}{2}} + u_d^n. \end{cases}$$

La deuxième et la troisième montrent que $\tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{1}{k}}$ est solution d'une équation simple, à condition de connaître $A - \alpha B$. La quatrième équation est obtenue avec l'aide de la première. Un seul terme inconnu n'est pas facilement calculable (il dépend de $\tilde{v}_{d-1}^{n+\frac{1}{2}}$ qui sera accessible seulement à la fin des k sous-pas de temps). En prenant $\alpha = \nu_d/2$, on se débarrasse de ce terme. Il reste à vérifier que l'équation implicite pour $\tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{1}{k}}$ est bien résoluble. Elle s'écrit :

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\Delta x_g}{2\Delta x_d}\right)\tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{1}{k}} = u_d^n - \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta x_g}{2\Delta x_d}\right)\tilde{u}_{g+1}^n - \frac{\nu_d}{2}v_{d+1}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\nu_d}{2k}v_g^{n+\frac{1}{2k}}. \quad (23)$$

Étapes 2s – 1 et 2s. On veut reproduire les deux étapes précédentes, puisque les équations sont quasi-inchangées. Elles font seulement intervenir les termes, désormais connus B^1, \dots, B^s et $\tilde{B}^1, \dots, \tilde{B}^s$. Les équations à résoudre pour obtenir $\tilde{v}_{g+1}^{n+\frac{2s-1}{2k}}$ et $\tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{s}{k}}$ sont respectivement :

$$\left[\gamma = \frac{\nu_d}{2}\right] \left\{ \left(\frac{c\Delta t}{4k\Delta x_g} + \frac{c\Delta t}{4k\Delta x_d}\right)\tilde{v}_{g+1}^{n+\frac{2s-1}{2k}} = u_g^{n+\frac{s-1}{k}} + \left(\frac{c\Delta t}{4k\Delta x_g} - \frac{c\Delta t}{4k\Delta x_d}\right)v_{g-1}^{n+\frac{2s-1}{2k}} - \tilde{u}_{d-1}^n + \frac{\nu_d}{2}v_d^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\nu_d}{k}(B^1 + \dots + B^{s-1}), \right. \quad (24)$$

$$\left[\alpha = \frac{\nu_d}{2}\right] \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{\Delta x_d}{2\Delta x_g}\right)\tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{s}{k}} = \frac{\nu_d}{2k}v_g^{n+\frac{2s-1}{2k}} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta x_g}{2\Delta x_d}\right)\tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{s-1}{k}} - \frac{\nu_d}{2}v_{d+1}^{n+\frac{1}{2}} + u_d^n + \frac{\nu_d}{k}(\tilde{B}^1 + \dots + \tilde{B}^{s-1}). \right. \quad (25)$$

Étapes 2k – 1 et 2k. On termine ainsi l'intégration du sous-domaine gauche en k sous-pas de temps. On dispose de toutes les variables "standard" à gauche, à savoir $(u_j^{n+1})_{j \leq g}$ et $(v_j^{n+1+\frac{1}{2k}})_{j \leq g}$ et de \tilde{u}_{g+1}^{n+1} . On dispose également de toutes les valeurs B^s et \tilde{B}^s , pour $1 \leq s \leq k$.

Étape 2k + 1. On veut avancer le champ u à droite, de Δt . Pour cela, on a besoin de $\tilde{v}_{d-1}^{n+\frac{1}{2}}$. On a les équations suivantes :

$$\begin{cases} u_d^{n+1} = u_d^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x_d}(v_{d+1}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{v}_{d-1}^{n+\frac{1}{2}}), \\ -\frac{\Delta x_d}{c\Delta t}(u_d^{n+1} - u_d^n) + \tilde{v}_{d-1}^{n+\frac{1}{2}} \equiv B = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k \tilde{B}^s, \end{cases}$$

dont la solution est donnée par $\tilde{v}_{d-1}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{2}{k} \sum_{s=1}^k \tilde{B}^s - v_{d+1}^{n+\frac{1}{2}}$.

Étape 2k + 2. On veut avancer le champ v à droite, de Δt . Pour cela, on a besoin de \tilde{u}_{d-1}^{n+1} . On a les équations suivantes :

$$\frac{\Delta x_d}{c\Delta t} (\tilde{u}_{d-1}^{n+1} - \tilde{u}_{d-1}^n) + v_d^{n+\frac{1}{2}} \equiv \tilde{B} \equiv \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k B^s.$$

Il suffit donc de prendre $\tilde{u}_{d-1}^{n+1} = \tilde{u}_{d-1}^n + \nu_d(1/k \sum_{s=1}^k B^s - v_d^{n+\frac{1}{2}})$. On dispose bien à la fin de cette dernière étape de toutes les valeurs à droite : $(u_j^{n+1})_{j \geq d}$, $(v_j^{n+3/2})_{j \geq d}$ et \tilde{u}_{d-1}^{n+1} .

Ainsi, l'algorithme $\alpha\gamma$ proposé est bien explicite et constructible. Il permet de conserver l'énergie totale. De plus, il demande seulement l'utilisation des variables numériques suivantes : $(u_j^n)_{j \leq g}$, $(v_j^{n+\frac{1}{2k}})_{j \leq g}$, $(u_j^n)_{j \geq d}$, $(v_j^{n+1/2})_{j \geq d}$, \tilde{u}_{g+1}^n et \tilde{u}_{d-1}^n , qui sont contrôlées par l'énergie totale (sous réserve que $c\Delta t < 2 \min(k\Delta x_g, \Delta x_d)$). Le schéma global de couplage est donc stable.

Algorithme $\alpha\gamma'$

Des étapes similaires sont construites. L'algorithme est constructible si $\alpha = \nu_d/2$ et $\gamma' = 2/\nu_d$. Les équations permettant de construire les variables annexes à chaque étape sont (25) et

$$\left[\gamma' = \frac{2}{\nu_d} \right] \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{kc\Delta t}{4\Delta x_d} + \frac{c\Delta t}{4k\Delta x_g} \right) \tilde{v}_{g+1}^{n+\frac{2s-1}{2k}} &= u_g^{n+\frac{s-1}{k}} + \left(\frac{c\Delta t}{4k\Delta x_g} - \frac{kc\Delta t}{4\Delta x_d} \right) v_{g-1}^{n+\frac{2s-1}{2k}} \\ &\quad - k\tilde{u}_{d-1}^n + \frac{k\nu_d}{2} v_d^{n+\frac{1}{2}} + 2(A^1 + \cdot + A^{s-1}). \end{aligned} \right. \quad (26)$$

On montre aussi que l'algorithme $\alpha\gamma'$ proposé est bien explicite, constructible, qu'il conserve l'énergie totale qui est une forme quadratique définie positive de toutes les inconnues, donc le schéma global de couplage est donc stable.

Algorithme $\alpha'\gamma$

Des étapes similaires sont construites. L'algorithme est constructible si $\alpha' = 2/\nu_d$ et $\gamma = \nu_d/2$. Les équations permettant de construire les variables annexes à chaque étape sont (24) et

$$\left[\alpha' = \frac{2}{\nu_d} \right] \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{1}{2k} + \frac{k\Delta x_g}{2\Delta x_d} \right) \tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{s}{k}} &= \frac{\nu_d}{2} v_g^{n+\frac{2s-1}{2k}} - \left(\frac{1}{2k} - \frac{k\Delta x_g}{2\Delta x_d} \right) \tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{s-1}{k}} \\ &\quad - \frac{\nu_d}{2} v_{d+1}^{n+\frac{1}{2}} + u_d^n - \frac{2}{k} (\tilde{A}^1 + \cdot + \tilde{A}^{s-1}). \end{aligned} \right. \quad (27)$$

On montre aussi que l'algorithme $\alpha'\gamma$ proposé est bien explicite, constructible, qu'il conserve l'énergie totale qui est une forme quadratique définie positive de toutes les inconnues, donc le schéma global de couplage est donc stable.

Algorithme $\alpha'\gamma'$

Des étapes similaires sont construites. L'algorithme est constructible si $\alpha' = 2/\nu_d$ et $\gamma' = 2/\nu_d$. Les équations permettant de construire les variables annexes à chaque étape sont (26) et (27). On montre aussi que l'algorithme $\alpha'\gamma'$ proposé est bien explicite, constructible, qu'il conserve l'énergie totale qui est une forme quadratique définie positive de toutes les inconnues, donc le schéma global de couplage est donc stable.

3.2.2 Deuxième famille d'algorithmes

On peut aussi construire des algorithmes de couplage vérifiant systématiquement

$$\frac{1}{k} \sum_{s=1}^k \tilde{A}^s \tilde{B}^s = \tilde{A} \tilde{B}, \quad \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k A^s B^s = AB.$$

Ces expressions, à comparer à celles de la première famille d'algorithmes, assurent aussi $\Delta\mathcal{F}_g + \Delta\mathcal{F}_d \equiv 0$. Pour cela, on utilise: $\forall(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}', \bar{\gamma}, \bar{\gamma}')$,

$$\frac{1}{k} \sum_{s=1}^k \tilde{A}^s \tilde{B}^s = \tilde{A} \tilde{B} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{B} = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k \tilde{B}^s, \tilde{A}^s = \tilde{A} - \bar{\alpha} \tilde{B} + \frac{\bar{\alpha}}{k} (2\tilde{B}^1 + \dots + 2\tilde{B}^{s-1} + \tilde{B}^s) \\ \text{ou} \\ \tilde{A} = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k \tilde{A}^s, \tilde{B}^s = \tilde{B} - \bar{\alpha}' \tilde{A} + \frac{\bar{\alpha}'}{k} (2\tilde{A}^1 + \dots + 2\tilde{A}^{s-1} + \tilde{A}^s) \end{cases}$$

$$\frac{1}{k} \sum_{s=1}^k A^s B^s = AB \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k B^s, A^s = A - \bar{\gamma} B + \frac{\bar{\gamma}}{k} (2B^1 + \dots + 2B^{s-1} + B^s) \\ \text{ou} \\ A = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k A^s, B^s = B - \bar{\gamma}' A + \frac{\bar{\gamma}'}{k} (2A^1 + \dots + 2A^{s-1} + A^s) \end{cases}$$

On peut vérifier que ces formules donnent aussi naissance à quatre autres algorithmes de couplage, correspondants aux deux fois deux choix proposés ci-dessus, que nous nommerons $\bar{\alpha}\bar{\gamma}$, $\bar{\alpha}'\bar{\gamma}$, $\bar{\alpha}\bar{\gamma}'$ et $\bar{\alpha}'\bar{\gamma}'$. On peut montrer que ces algorithmes sont réellement explicites (et donc implémentables) si on choisit $\bar{\alpha} = \nu_d/2$, $\bar{\gamma} = \nu_d/2$, $\bar{\alpha}' = 2/\nu_d$ et $\bar{\gamma}' = 2/\nu_d$

3.2.3 Synthèse

On résume ici les équations utilisées pour les huit algorithmes proposés ci-dessus. Les paramètres $(\alpha, \alpha', \text{etc...})$ sont remplacés par les valeurs les rendant constructibles.

$$\begin{aligned}
 &\textbf{Algorithme } \alpha\gamma \quad (\alpha = \frac{\nu_d}{2}, \gamma = \frac{\nu_d}{2}) \\
 &B = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k \tilde{B}^s, \tilde{B} = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k B^s \\
 &\tilde{A}^s = A - \frac{\nu_d}{2} B + \frac{\nu_d}{2k} (2\tilde{B}^1 + \dots + 2\tilde{B}^{s-1} + \tilde{B}^s) \\
 &A^s = \tilde{A} - \frac{\nu_d}{2} \tilde{B} + \frac{\nu_d}{2k} (2B^1 + \dots + 2B^{s-1} + B^s) \\
 &\left(1 + \frac{\Delta x_d}{\Delta x_g}\right) \tilde{v}_{g+1}^{n+\frac{2s-1}{2k}} = \frac{4k}{\nu_d} u_g^{n+\frac{s-1}{k}} - \left(1 - \frac{\Delta x_d}{\Delta x_g}\right) v_{g-1}^{n+\frac{2s-1}{2k}} - \frac{4k}{\nu_d} \tilde{u}_{d-1}^n + 2k v_d^{n+\frac{1}{2}} - 4(B^1 + \dots + B^{s-1}) \\
 &\left(1 + \frac{\Delta x_g}{\Delta x_d}\right) \tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{s}{k}} = \frac{\nu_d}{k} v_g^{n+\frac{2s-1}{2k}} - \left(1 - \frac{\Delta x_g}{\Delta x_d}\right) \tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{s-1}{k}} - \nu_d v_{d+1}^{n+\frac{1}{2}} + 2u_d^n + \frac{2\nu_d}{k} (\tilde{B}^1 + \dots + \tilde{B}^{s-1})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\textbf{Algorithme } \alpha\gamma' \quad (\alpha = \frac{\nu_d}{2}, \gamma' = \frac{2}{\nu_d}) \\
 &B = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k \tilde{B}^s, \tilde{A} = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k A^s \\
 &\tilde{A}^s = A + \frac{\nu_d}{2} B + \frac{\nu_d}{2k} (2\tilde{B}^1 + \dots + 2\tilde{B}^{s-1} + \tilde{B}^s) \\
 &B^s = \tilde{B} - \frac{2}{\nu_d} \tilde{A} + \frac{2}{\nu_d k} (2A^1 + \dots + 2A^{s-1} + A^s) \\
 &\left(1 + \frac{\Delta x_d}{k^2 \Delta x_g}\right) \tilde{v}_{g+1}^{n+\frac{2s-1}{2k}} = \frac{4}{k\nu_d} u_g^{n+\frac{s-1}{k}} + \left(\frac{\Delta x_d}{k^2 \Delta x_g} - 1\right) v_{g-1}^{n+\frac{2s-1}{2k}} - \frac{4}{\nu_d} \tilde{u}_{d-1}^n + 2v_d^{n+\frac{1}{2}} + \frac{8}{k\nu_d} (A^1 + \dots + A^{s-1}) \\
 &\left(1 + \frac{\Delta x_g}{\Delta x_d}\right) \tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{s}{k}} = \frac{\nu_d}{k} v_g^{n+\frac{2s-1}{2k}} - \left(1 - \frac{\Delta x_g}{\Delta x_d}\right) \tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{s-1}{k}} - \nu_d v_{d+1}^{n+\frac{1}{2}} + 2u_d^n + \frac{2\nu_d}{k} (\tilde{B}^1 + \dots + \tilde{B}^{s-1})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\textbf{Algorithme } \alpha'\gamma \quad (\alpha' = \frac{2}{\nu_d}, \gamma = \frac{\nu_d}{2}) \\
 &A = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k \tilde{A}^s, \tilde{B} = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k B^s \\
 &\tilde{B}^s = B - \frac{2}{\nu_d} A + \frac{2}{k\nu_d} (2\tilde{A}^1 + \dots + 2\tilde{A}^{s-1} + \tilde{A}^s) \\
 &A^s = \tilde{A} - \frac{\nu_d}{2} \tilde{B} + \frac{\nu_d}{2k} (2B^1 + \dots + 2B^{s-1} + B^s) \\
 &\left(1 + \frac{\Delta x_d}{\Delta x_g}\right) \tilde{v}_{g+1}^{n+\frac{2s-1}{2k}} = \frac{4k}{\nu_d} u_g^{n+\frac{s-1}{k}} + \left(1 - \frac{\Delta x_d}{\Delta x_g}\right) v_{g-1}^{n+\frac{2s-1}{2k}} - \frac{4k}{\nu_d} \tilde{u}_{d-1}^n + 2k v_d^{n+\frac{1}{2}} - 4(B^1 + \dots + B^{s-1}) \\
 &\left(1 + \frac{k^2 \Delta x_g}{\Delta x_d}\right) \tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{s}{k}} = k\nu_d v_g^{n+\frac{2s-1}{2k}} - \left(1 - \frac{k^2 \Delta x_g}{\Delta x_d}\right) \tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{s-1}{k}} - k\nu_d v_{d+1}^{n+\frac{1}{2}} + 2k u_d^n - 4(\tilde{A}^1 + \dots + \tilde{A}^{s-1})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\textbf{Algorithme } \alpha'\gamma' \quad (\alpha' = \frac{2}{\nu_d}, \gamma' = \frac{2}{\nu_d}) \\
 &A = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k \tilde{A}^s, \tilde{A} = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k A^s \\
 &\tilde{B}^s = B - \frac{2}{\nu_d} A + \frac{2}{k\nu_d} (2\tilde{A}^1 + \dots + 2\tilde{A}^{s-1} + \tilde{A}^s) \\
 &B^s = \tilde{B} - \frac{2}{\nu_d} \tilde{A} + \frac{2}{\nu_d k} (2A^1 + \dots + 2A^{s-1} + A^s) \\
 &\left(1 + \frac{\Delta x_d}{k^2 \Delta x_g}\right) \tilde{v}_{g+1}^{n+\frac{2s-1}{2k}} = \frac{4}{k\nu_d} u_g^{n+\frac{s-1}{k}} + \left(\frac{\Delta x_d}{k^2 \Delta x_g} - 1\right) v_{g-1}^{n+\frac{2s-1}{2k}} - \frac{4}{\nu_d} \tilde{u}_{d-1}^n + 2v_d^{n+\frac{1}{2}} + \frac{8}{k\nu_d} (A^1 + \dots + A^{s-1}) \\
 &\left(1 + \frac{k^2 \Delta x_g}{\Delta x_d}\right) \tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{s}{k}} = k\nu_d v_g^{n+\frac{2s-1}{2k}} - \left(1 - \frac{k^2 \Delta x_g}{\Delta x_d}\right) \tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{s-1}{k}} - k\nu_d v_{d+1}^{n+\frac{1}{2}} + 2k u_d^n - 4(\tilde{A}^1 + \dots + \tilde{A}^{s-1})
 \end{aligned}$$

Algorithme $\bar{\alpha}\bar{\gamma}$ ($\bar{\alpha} = \frac{\nu_d}{2}, \bar{\gamma} = \frac{\nu_d}{2}$)

$$\begin{aligned}\tilde{B} &= \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k \tilde{B}^s, B = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k B^s \\ \tilde{A}^s &= \tilde{A} - \frac{\nu_d}{2} \tilde{B} + \frac{\nu_d}{2k} (2\tilde{B}^1 + \dots + 2\tilde{B}^{s-1} + \tilde{B}^s) \\ A^s &= A - \frac{\nu_d}{2} B + \frac{\nu_d}{2k} (2B^1 + \dots + 2B^{s-1} + B^s) \\ \left(1 + \frac{\Delta x_d}{\Delta x_g}\right) \tilde{v}_{g+1}^{n+\frac{2s-1}{2k}} &= \frac{4k}{\nu_d} u_g^{n+\frac{s-1}{k}} + \left(1 - \frac{\Delta x_d}{\Delta x_g}\right) v_{g-1}^{n+\frac{2s-1}{2k}} - \frac{4k}{\nu_d} u_d^n + 2k v_{d+1}^{n+\frac{1}{2}} - 4(B^1 + \dots + B^{s-1}) \\ \left(1 + \frac{\Delta x_g}{\Delta x_d}\right) \tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{s}{k}} &= \frac{\nu_d}{k} v_g^{n+\frac{2s-1}{2k}} - \left(1 - \frac{\Delta x_g}{\Delta x_d}\right) \tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{s-1}{k}} - \nu_d v_d^{n+\frac{1}{2}} + 2\tilde{u}_{d-1}^n + \frac{2\nu_d}{k} (\tilde{B}^1 + \dots + \tilde{B}^{s-1})\end{aligned}$$

Algorithme $\bar{\alpha}\bar{\gamma}'$ ($\bar{\alpha} = \frac{\nu_d}{2}, \bar{\gamma}' = \frac{2}{\nu_d}$)

$$\begin{aligned}\tilde{B} &= \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k \tilde{B}^s, A = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k A^s \\ \tilde{A}^s &= \tilde{A} - \frac{\nu_d}{2} \tilde{B} + \frac{\nu_d}{2k} (2\tilde{B}^1 + \dots + 2\tilde{B}^{s-1} + \tilde{B}^s) \\ B^s &= B - \frac{2}{\nu_d} A + \frac{2}{k\nu_d} (2A^1 + \dots + 2A^{s-1} + A^s) \\ \left(1 + \frac{\Delta x_d}{k^2 \Delta x_g}\right) \tilde{v}_{g+1}^{n+\frac{2s-1}{2k}} &= \frac{4}{k\nu_d} u_g^{n+\frac{s-1}{k}} + \left(\frac{\Delta x_d}{k^2 \Delta x_g} - 1\right) v_{g-1}^{n+\frac{2s-1}{2k}} - \frac{4}{\nu_d} u_d^n + 2v_{d+1}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{8}{k\nu_d} (A^1 + \dots + A^{s-1}) \\ \left(1 + \frac{\Delta x_g}{\Delta x_d}\right) \tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{s}{k}} &= \frac{\nu_d}{k} v_g^{n+\frac{2s-1}{2k}} - \left(1 - \frac{\Delta x_g}{\Delta x_d}\right) \tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{s-1}{k}} - \nu_d v_d^{n+\frac{1}{2}} + 2\tilde{u}_{d-1}^n + \frac{2\nu_d}{k} (\tilde{B}^1 + \dots + \tilde{B}^{s-1})\end{aligned}$$

Algorithme $\bar{\alpha}'\bar{\gamma}$ ($\bar{\alpha}' = \frac{2}{\nu_d}, \bar{\gamma} = \frac{\nu_d}{2}$)

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k \tilde{A}^s, B = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k B^s \\ \tilde{B}^s &= \tilde{B} - \frac{2}{\nu_d} \tilde{A} + \frac{2}{k\nu_d} (2\tilde{A}^1 + \dots + 2\tilde{A}^{s-1} + \tilde{A}^s) \\ A^s &= A - \frac{\nu_d}{2} B + \frac{\nu_d}{2k} (2B^1 + \dots + 2B^{s-1} + B^s) \\ \left(1 + \frac{\Delta x_d}{\Delta x_g}\right) \tilde{v}_{g+1}^{n+\frac{2s-1}{2k}} &= \frac{4k}{\nu_d} u_g^{n+\frac{s-1}{k}} + \left(1 - \frac{\Delta x_d}{\Delta x_g}\right) v_{g-1}^{n+\frac{2s-1}{2k}} - \frac{4k}{\nu_d} u_d^n + 2k v_{d+1}^{n+\frac{1}{2}} - 4(B^1 + \dots + B^{s-1}) \\ \left(1 + \frac{k^2 \Delta x_g}{\Delta x_d}\right) \tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{s}{k}} &= k\nu_d v_g^{n+\frac{2s-1}{2k}} - \left(1 - \frac{k^2 \Delta x_g}{\Delta x_d}\right) \tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{s-1}{k}} - k\nu_d v_d^{n+\frac{1}{2}} + 2k\tilde{u}_{d-1}^n - 4(\tilde{A}^1 + \dots + \tilde{A}^{s-1})\end{aligned}$$

Algorithme $\bar{\alpha}'\bar{\gamma}'$ ($\bar{\alpha}' = \frac{2}{\nu_d}, \bar{\gamma}' = \frac{2}{\nu_d}$)

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k \tilde{A}^s, A = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k A^s \\ \tilde{B}^s &= \tilde{B} - \frac{2}{\nu_d} \tilde{A} + \frac{2}{k\nu_d} (2\tilde{A}^1 + \dots + 2\tilde{A}^{s-1} + \tilde{A}^s) \\ B^s &= B - \frac{2}{\nu_d} A + \frac{2}{k\nu_d} (2A^1 + \dots + 2A^{s-1} + A^s) \\ \left(1 + \frac{\Delta x_d}{k^2 \Delta x_g}\right) \tilde{v}_{g+1}^{n+\frac{2s-1}{2k}} &= \frac{4}{k\nu_d} u_g^{n+\frac{s-1}{k}} + \left(\frac{\Delta x_d}{k^2 \Delta x_g} - 1\right) v_{g-1}^{n+\frac{2s-1}{2k}} - \frac{4}{\nu_d} u_d^n + 2v_{d+1}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{8}{k\nu_d} (A^1 + \dots + A^{s-1}) \\ \left(1 + \frac{k^2 \Delta x_g}{\Delta x_d}\right) \tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{s}{k}} &= k\nu_d v_g^{n+\frac{2s-1}{2k}} - \left(1 - \frac{k^2 \Delta x_g}{\Delta x_d}\right) \tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{s-1}{k}} - k\nu_d v_d^{n+\frac{1}{2}} + 2k\tilde{u}_{d-1}^n - 4(\tilde{A}^1 + \dots + \tilde{A}^{s-1})\end{aligned}$$

Les algorithmes des deux familles sont très proches : des termes sont échangés entre les algorithmes de mêmes paramètres (par exemple $2\tilde{u}_{d-1}^n - \nu_d v_d^{n+\frac{1}{2}}$ et $2u_d^n - \nu_d v_{d+1}^{n+\frac{1}{2}}$ dans les expressions donnant $\tilde{v}_{g+1}^{n+\frac{2s-1}{2k}}$ et $\tilde{u}_{g+1}^{n+\frac{s}{k}}$ pour les algorithmes $\alpha\gamma$ et $\bar{\alpha}\bar{\gamma}$).

3.2.4 Simulations numériques

On cherche ici à comparer les huit algorithmes précédents pour plusieurs valeurs de k dans différentes configurations :

- **Cas 1** : deux maillages réguliers avec $\Delta x_d = \Delta x_g$ (soit $\nu_g = \nu_d/k$);
- **Cas 2** : deux maillages réguliers avec $\Delta x_d = k\Delta x_g$ (soit $\nu_d = \nu_g$);
- **Cas 3** : deux maillages irréguliers avec $\Delta x_d = \Delta x_g$ près de leur interface.

On regarde plus particulièrement la propagation d'un pulse de la zone grossière à la zone fine (le pulse est initialement en $x = 0.5$, se déplace vers la gauche). La simulation est arrêtée à $t = 1$.

Algorithme $\alpha\gamma$ - Cas 1

Des essais numériques sont résumés pour le **Cas 1** dans la table 7. On tire des expériences numériques les conclusions suivantes :

$\downarrow \nu_d \quad k \rightarrow$	1	2	3	5	9	17	33
0.5	$6.6 \cdot 10^{-7}$	0.886	$1.5 \cdot 10^{-6}$	$1.7 \cdot 10^{-6}$	$1.7 \cdot 10^{-6}$	$1.7 \cdot 10^{-6}$	$1.8 \cdot 10^{-6}$
0.95	$1.2 \cdot 10^{-6}$	0.884	$1.26 \cdot 10^{-5}$	$1.44 \cdot 10^{-5}$	$1.52 \cdot 10^{-5}$	$1.54 \cdot 10^{-5}$	$1.55 \cdot 10^{-5}$
1.45	$7.63 \cdot 10^{-7}$	0.879	$6.27 \cdot 10^{-5}$	$7.18 \cdot 10^{-5}$	$7.54 \cdot 10^{-5}$	$7.66 \cdot 10^{-5}$	$7.70 \cdot 10^{-5}$
1.95	$1.16 \cdot 10^{-8}$	0.871	$2.02 \cdot 10^{-4}$	$2.28 \cdot 10^{-4}$	$2.39 \cdot 10^{-4}$	$2.42 \cdot 10^{-4}$	$2.43 \cdot 10^{-4}$

$\downarrow \nu_d \quad k \rightarrow$	1	3	5	9	17	33
0.5	$2.98 \cdot 10^{-7}$	$4.10 \cdot 10^{-6}$	$4.80 \cdot 10^{-6}$	$5.00 \cdot 10^{-6}$	$5.10 \cdot 10^{-6}$	$5.10 \cdot 10^{-6}$
0.95	$9.22 \cdot 10^{-8}$	$4.96 \cdot 10^{-5}$	$5.74 \cdot 10^{-5}$	$6.06 \cdot 10^{-5}$	$6.17 \cdot 10^{-5}$	$6.20 \cdot 10^{-5}$
1.45	$1.93 \cdot 10^{-9}$	$2.67 \cdot 10^{-4}$	$3.07 \cdot 10^{-4}$	$3.23 \cdot 10^{-4}$	$3.28 \cdot 10^{-4}$	$3.29 \cdot 10^{-4}$
1.95	$3.29 \cdot 10^{-14}$	$8.72 \cdot 10^{-4}$	$9.88 \cdot 10^{-4}$	$1.03 \cdot 10^{-3}$	$1.05 \cdot 10^{-3}$	$1.05 \cdot 10^{-3}$

TAB. 7 – Fraction d'énergie réfléchie - Algorithme $\alpha\gamma$ - Cas 1 - $n_g = n_d = 100$ en haut et $n_g = n_d = 50$ en bas.

- l'énergie est effectivement conservée, le schéma est stable si $\nu < 2$ partout;
- l'algorithme est incapable de gérer correctement une valeur paire de k (voir Figure 13). Ceci s'explique par le fait que les valeurs paires de k ne fournissent pas d'approximation synchrone en $t^{n+1/2}$ pour v à l'interface;
- l'algorithme se comporte d'autant mieux que le nombre de points en espace est grand (comparer les Figures 14 et 15). L'énergie de l'onde parasite réfléchie a l'air même d'ordre deux en Δx ;

- l'algorithme ne se comporte pas très bien quand ν_d augmente. Des oscillations parasites apparaissent (voir sur les Figures 14 et 15). Peut-être les choix initiaux sur les énergies modifiées ne sont pas optimal, au sens où, privilégiant de pouvoir assurer la stabilité jusqu'à $\nu < 2$, on n'a pas choisi de contrôler plus fortement les valeurs auxiliaires (ce qui aurait pu être fait).

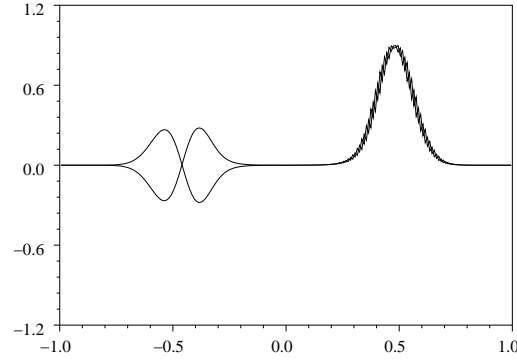


FIG. 13 – $\alpha\gamma$ - **Cas 1** - $\nu_d = 0.5$ - $k = 2$ - $n_d = n_g = 100$.

Algorithme $\alpha\gamma$ - **Cas 2**

Des essais numériques sont résumés pour le **Cas 2** dans la table 8. On tire des expériences numériques les conclusions supplémentaires suivantes :

$\downarrow \nu_d \quad k \rightarrow$	1	2	3	5	9
0.5	$5 \cdot 10^{-21}$	0.798	$1.52 \cdot 10^{-5}$	$1.77 \cdot 10^{-5}$	$1.88 \cdot 10^{-5}$
0.95	$1 \cdot 10^{-21}$	0.781	$3.36 \cdot 10^{-5}$	$4.10 \cdot 10^{-5}$	$2.47 \cdot 10^{-4}$
1.45	$4 \cdot 10^{-22}$	0.734	$1.20 \cdot 10^{-4}$	$1.64 \cdot 10^{-3}$	$3.01 \cdot 10^{-3}$
1.95	$1 \cdot 10^{-22}$	0.439	$1.23 \cdot 10^{-2}$	$1.34 \cdot 10^{-2}$	$1.37 \cdot 10^{-2}$

TAB. 8 – *Fraction d'énergie réfléchie* - **Algorithme $\alpha\gamma$ - Cas 2** - $nd = 100$.

- l'algorithme ne sait pas gérer un brusque changement de la taille de maille entre les sous-domaines, surtout quand le nombre de Courant augmente (voir Figure 16). Des oscillations parasites sont transmises à l'intérieur du sous-domaine. Ceci n'est pas vraiment étonnant, car le schéma en volumes finis initial ne sait pas gérer non plus un brusque changement de taille de maille.

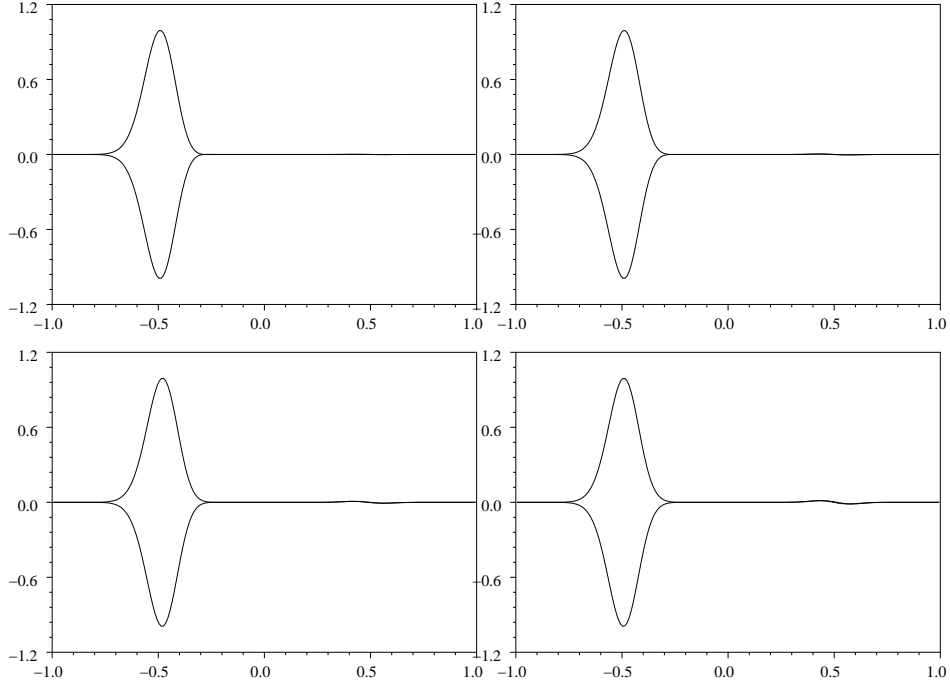


FIG. 14 – $\alpha\gamma$ - **Cas 1** - $\nu_d = 0.5; 0.95; 1.45; 1.95$ - $k = 5$ - $n_d = n_g = 100$.

- On peut cependant noter que le schéma se comporte excellentement quand $k = 1$ (l'algorithme étant partitionné inutilement). On peut d'ailleurs démontrer que dans ce cas, l'algorithme $\alpha\gamma$ est équivalent à l'algorithme non partitionné.

Algorithme $\alpha\gamma$ - **Cas 3**

Pour le **Cas 3**, on se propose de faire la simulation suivante : on suppose que l'on doit simuler la propagation d'une onde dans un domaine de longueur grande (ici, $L \simeq 20.46$) avec des contraintes locales sur le maillage, à savoir:

- dans $[0; 20]$, on veut $\Delta x \simeq 0.04$;
- dans $[-0.46; -0.44]$, on veut $\Delta x \simeq 0.04/k$, avec $k = 41$;
- on prend un maillage tel que, dans $[-0.44; 0]$, le rapport entre deux mailles successives est de l'ordre de 1.1.

Ceci conduit à un maillage de 560 points. On prend un pulse initial de la forme $u(x) = -v(x) = \exp(-5 * (x - 10)^2)$ et on simule jusqu'à $T = 20.919$ en prenant $\nu_d = 1.9$. On a tracé sur la Figure 17 la solution obtenue à $T = 20.919$. Des zooms sur la partie maillée finement montrent que la solution est très régulière près de l'interface. Grâce à l'utilisation

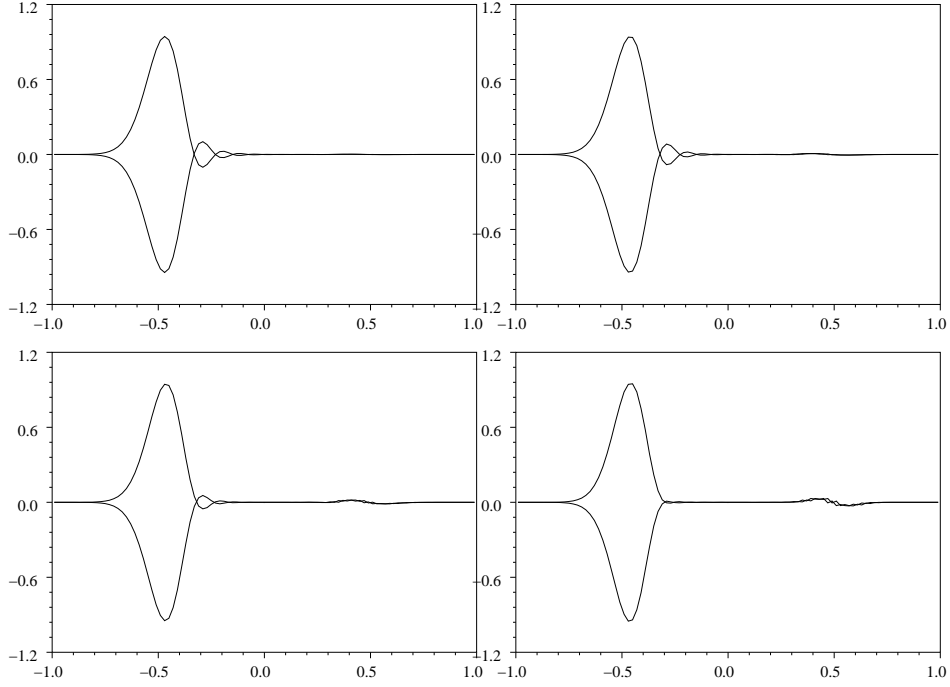


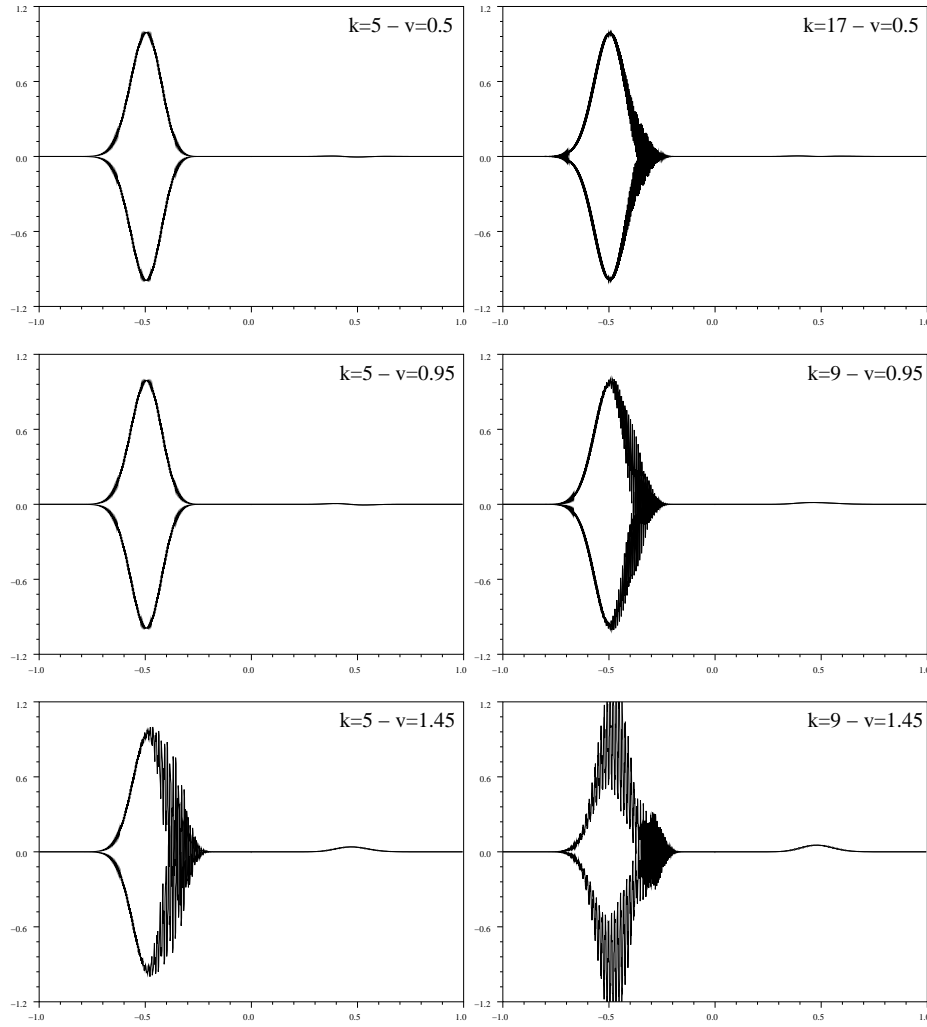
FIG. 15 – $\alpha\gamma$ - **Cas 1** - $\nu_d = 0.5; 0.95; 1.45; 1.95$ - $k = 5$ - $n_d = n_g = 50$.

d'un sous-cyclage de $k = 41$, le temps de calcul a été divisé par environ huit par rapport au schéma standard en temps sur le même maillage. Par rapport à un calcul sur un maillage uniforme (avec une maille égale à la maille la plus petite) et sans sous-cyclage en temps, le temps de calcul a été divisé par 300, ce qui est déjà très spectaculaire en une dimension d'espace!

Autres algorithmes.

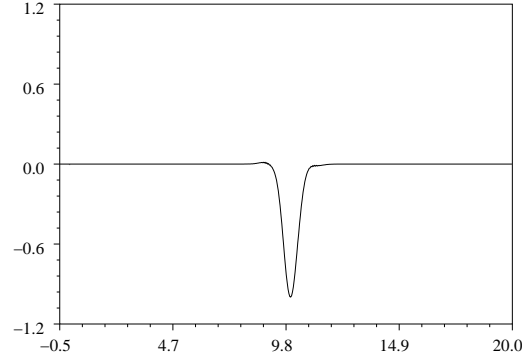
Pour le **Cas 1**, tous les autres algorithmes donnent des résultats moins bons que ceux de l'algorithme $\alpha\gamma$. On a tracé sur la Figure 19 les résultats obtenus pour le **Cas 1** après $t = 1$ pour les différents algorithmes. Parmi les résultats, on peut noter que l'algorithme $\bar{\alpha}\bar{\gamma}$ fournit le même genre de réflexion parasite, mais pour une onde transmise chahutée. D'autre part, l'algorithme $\alpha\gamma'$ donne un résultat très comparable (la réflexion parasite semble plus haute fréquence).

Pour le **Cas 2** et le **Cas 3**, les mêmes conclusions demeurent. On en déduit que le meilleur algorithme au vu de ces résultats numériques est l'algorithme $\alpha\gamma$.

FIG. 16 – $\alpha\gamma$ - Cas 2 - $n_d = 100$ - $n_g = k n_d$.

3.2.5 Conclusions et autres remarques

Après avoir construit beaucoup d'algorithmes possibles, l'algorithme $\alpha\gamma$ semble rassembler les meilleures caractéristiques. On peut néanmoins faire ici quelques remarques importantes.

FIG. 17 - $\alpha\gamma$ - **Cas 3** - $\nu_d = 1.9$ - $k = 41$.

D'abord, on aurait pu faire d'autres choix que (17) et (18) pour les énergies modifiées \mathcal{F}_g^n et \mathcal{F}_d^n , par exemple

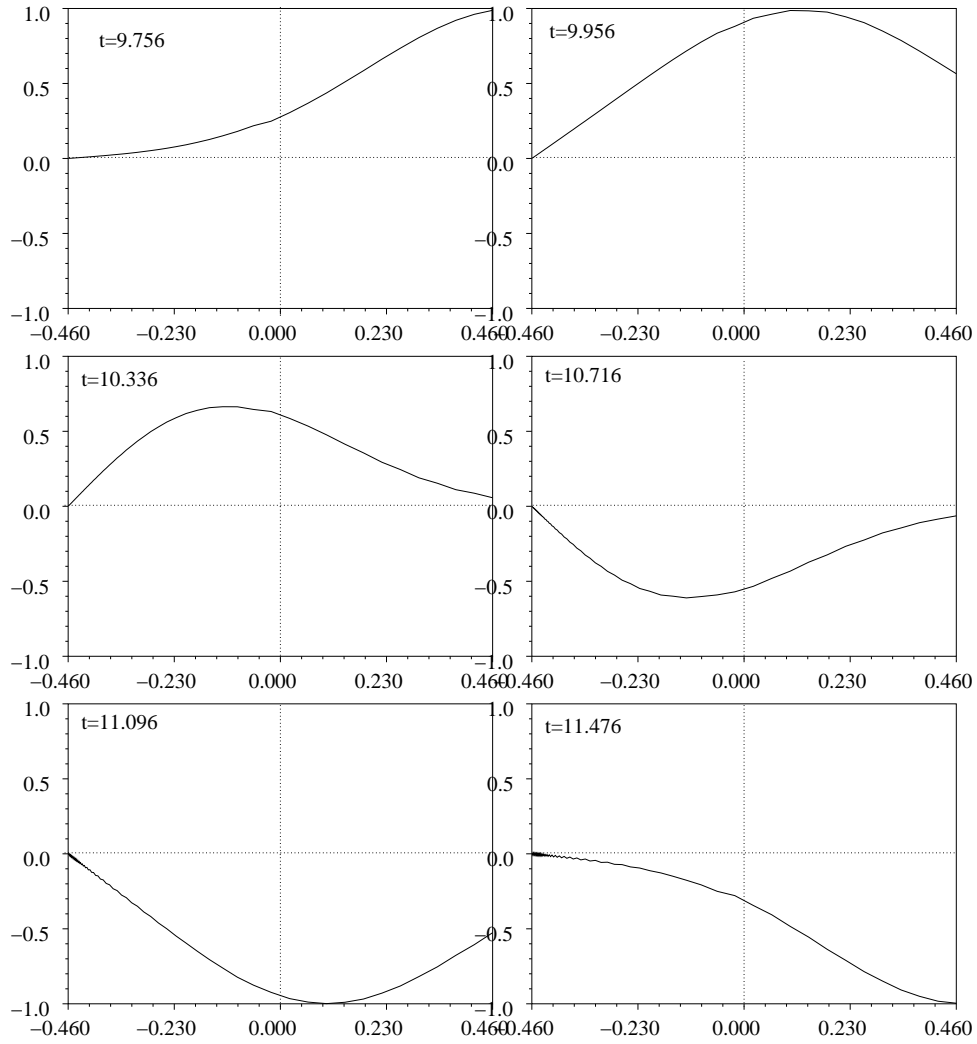
$$\begin{aligned}\mathcal{F}_g^n &= \frac{\Delta x_g}{2} \left[\sum_{j \leq g-1} \left(u_j^{n,2} + v_j^{n+\frac{1}{2k}} v_j^{n-\frac{1}{2k}} \right) + \theta_g u_g^{n,2} + (1 - \theta_g) \tilde{u}_{g+1}^{n,2} + v_g^{n+\frac{1}{2k}} v_g^{n-\frac{1}{2k}} \right], \\ \mathcal{F}_d^n &= \frac{\Delta x_d}{2} \left[\sum_{j \geq d+1} \left(u_j^{n,2} + v_j^{n+\frac{1}{2}} v_j^{n-\frac{1}{2}} \right) + \theta_d u_d^{n,2} + (1 - \theta_d) \tilde{u}_{d-1}^{n,2} + v_d^{n+\frac{1}{2}} v_d^{n-\frac{1}{2}} \right].\end{aligned}$$

On peut faire exactement les mêmes constructions que celles présentées plus haut. Il est curieux de constater que les schémas produits avec $\theta_g = \theta_d$ semblent exactement équivalents à ceux présentés plus haut (où $\theta_g = \theta_d = \frac{1}{2}$). Par ailleurs, les schémas avec $\theta_g \neq \theta_d$ donnent hélas des résultats moins bons (en termes d'ondes parasites renvoyées par l'interface fictive).

Ensuite, les choix d'algorithmes introduits ici en pages 31 ou 34 utilisent tous des sommes finies de la forme $2\tilde{B}^1 + \dots + 2\tilde{B}^{s-1} + \tilde{B}^s$. Ce choix n'est pas unique. On peut d'ailleurs montrer que d'autres choix sont possibles. Cependant, nous avons expérimentalement observés que le choix général retenu ici donne les meilleurs résultats (en termes d'ondes parasites émises par l'interface entre maillages).

Enfin, nous avons observé plus en détail le comportement effectif de l'algorithme $\alpha\gamma$. Et celui-ci est extrêmement surprenant. En effet, on peut montrer les assertions suivantes : si k est impair, si $\Delta x_g = \Delta x_d$ et si à $\tilde{u}_{d-1}^0 = u_g^0$, alors

- $\forall n, \tilde{u}_{d-1}^n = u_g^n$,
- $\forall n, \forall k, \tilde{v}_{g+1}^{n+\frac{2s-1}{2k}} = (-1)^{s+1} k v_d^{n+\frac{1}{2}}$,

FIG. 18 - $\alpha\gamma$ - Cas 3 - $\nu_d = 1.9$ - $k = 41$.

- $\forall n, \tilde{u}_{g+1}^n = u_d^n$ et $\tilde{v}_{d-1}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k v_g^{n+\frac{2s-1}{2k}}$ (ceci est numériquement observé et, contrairement aux deux assertions précédentes, nous ne parvenons pas à le démontrer).

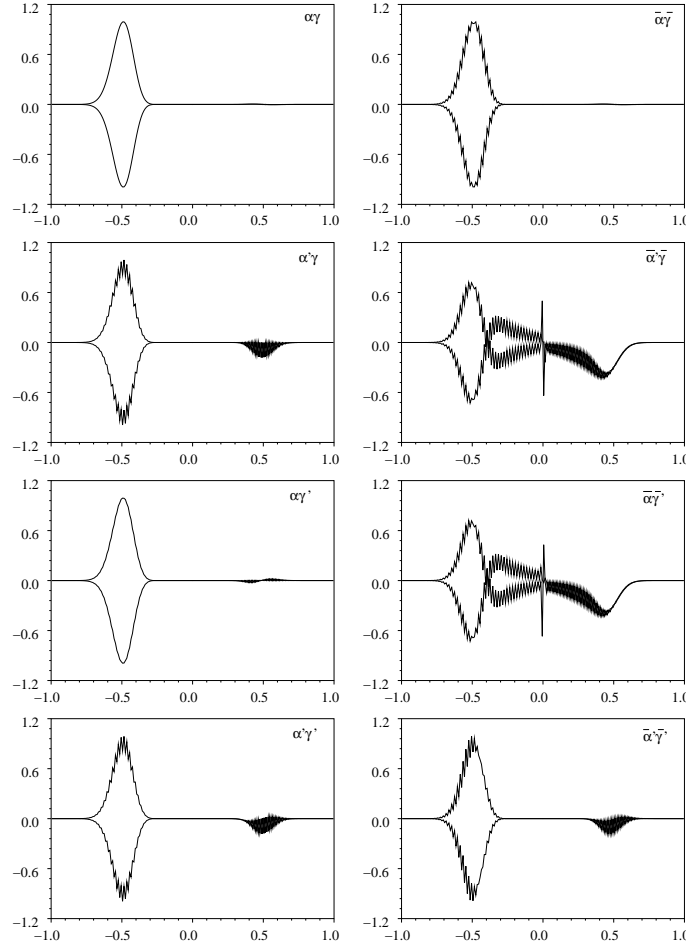


FIG. 19 – *Autres algorithmes - Cas 1* : $\nu_d = 0.95$ - $n_g = n_d = 100$ - $k = 5$.

3.3 Couplage entre formulations de type Galerkin Discontinu

On considère deux formulations en éléments finis discontinus sur deux sous-domaines voisins, comme dans les sections précédentes. Le schéma (5) est rappelé ici :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x_i \mathbb{M}_K \frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{c\Delta t} + \mathbb{K}_K \mathbf{v}_{i-1}^{n+1/2} + \mathbb{K}_K \mathbf{v}_i^{n+1/2} + \mathbb{K}_K \mathbf{v}_{i+1}^{n+1/2} = 0, \\ \Delta x_i \mathbb{M}_K \frac{\mathbf{v}_i^{n+3/2} - \mathbf{v}_i^{n+1/2}}{c\Delta t} + \mathbb{K}_K \mathbf{u}_{i-1}^{n+1} + \mathbb{K}_K \mathbf{u}_i^{n+1} + \mathbb{K}_K \mathbf{u}_{i+1}^{n+1} = 0, \end{array} \right.$$

où \mathbb{M}_K est la matrice locale de masse, et \mathbb{K}_K , \mathbb{K}_K et $\overline{\mathbb{K}}_K$ sont les matrices locales de rigidité, toutes données en page 11. Dans le premier sous-domaine, à "gauche", on avance en temps avec k pas de temps de $\Delta t/k$, tandis que l'on avance en une seule fois le sous-domaine de "droite" de Δt . À gauche, on numérote les cellules de $-\infty$ jusqu'à l'indice g . Des inconnues supplémentaires fictives $\tilde{\mathbf{u}}_{g+1}^{n+\frac{s}{k}}$ et $\tilde{\mathbf{v}}_{g+1}^{n+\frac{2s-1}{2k}}$ sont introduites. Similairement, à droite, on numérote les cellules de l'indice d jusqu'à $+\infty$. Des inconnues supplémentaires fictives $\tilde{\mathbf{u}}_{d-1}^n$ et $\tilde{\mathbf{v}}_{d-1}^{n+\frac{1}{2}}$ sont introduites.

3.3.1 Construction d'une énergie globale

On considère les énergies suivantes :

$$\mathcal{F}_g^n = \sum_{i \leq g} \frac{\Delta x_i}{2} \left({}^t \mathbf{u}_i^n \mathbb{M} \mathbf{u}_i^n + {}^t \mathbf{v}_i^{n-\frac{1}{2k}} \mathbb{M} \mathbf{v}_i^{n+\frac{1}{2k}} \right) + \Delta x_g \left({}^t \tilde{\mathbf{u}}_{g+1}^n \mathbb{M}_g \tilde{\mathbf{u}}_{g+1}^n - {}^t \mathbf{u}_g^n \mathbb{M}_g \mathbf{u}_g^n \right) \quad (28)$$

$$\mathcal{F}_d^n = \sum_{i \geq d} \frac{\Delta x_i}{2} \left({}^t \mathbf{u}_i^n \mathbb{M} \mathbf{u}_i^n + {}^t \mathbf{v}_i^{n-1/2} \mathbb{M} \mathbf{v}_i^{n+1/2} \right) + \Delta x_d \left({}^t \tilde{\mathbf{u}}_{d-1}^n \mathbb{M}_d \tilde{\mathbf{u}}_{d-1}^n - {}^t \mathbf{u}_d^n \mathbb{M}_d \mathbf{u}_d^n \right). \quad (29)$$

Comme dans le cas des volumes finis, ces énergies ont été choisies pour assurer la stabilité des schémas. Elles font intervenir les variables annexes (avec \cdot). On cherchera par la suite à démontrer que l'énergie globale se conserve, tout en étant une fonction de Lyapunov de toutes les inconnues numériques). On a les résultats suivants :

$$\begin{aligned} 2\mathcal{F}_g^n &\geq \sum_{i \leq g} \left(\Delta x_i - \frac{c\Delta t}{2k}(c_K + 2d_K) \right) \left({}^t \mathbf{v}_i^{n-\frac{1}{2k}} \mathbb{M}_K \mathbf{v}_i^{n-\frac{1}{2k}} + {}^t \mathbf{u}_i^n \mathbb{M}_K \mathbf{u}_i^n \right) \\ &\quad + \frac{c\Delta t}{2k} d_K \left({}^t \mathbf{u}_g^n \mathbb{M}_K \mathbf{u}_g^n - {}^t \tilde{\mathbf{u}}_{g+1}^n \mathbb{M}_K \tilde{\mathbf{u}}_{g+1}^n \right) + \Delta x_g \left({}^t \tilde{\mathbf{u}}_{g+1}^n \mathbb{M}_g \tilde{\mathbf{u}}_{g+1}^n - {}^t \mathbf{u}_g^n \mathbb{M}_g \mathbf{u}_g^n \right). \end{aligned}$$

Il suffit de prendre alors $\mathbb{M}_g = \frac{d_K}{c_K + 2d_K} \mathbb{M}_K$, pour voir la minoration suivante :

$$\begin{aligned} 2\mathcal{F}_g^n &\geq \sum_{i \leq g} {}^t \mathbf{v}_i^{n-\frac{1}{2k}} \mathbb{M}_K \mathbf{v}_i^{n-\frac{1}{2k}} \left(\Delta x_i - \frac{c\Delta t}{2k}(c_K + 2d_K) \right) \\ &\quad + \sum_{i \leq g-1} {}^t \mathbf{u}_i^n \mathbb{M}_K \mathbf{u}_i^n \left(\Delta x_i - \frac{c\Delta t}{2k}(c_K + 2d_K) \right) \\ &\quad + \left(\frac{c_K + d_K}{c_K + 2d_K} {}^t \mathbf{u}_g^n \mathbb{M}_K \mathbf{u}_g^n + \frac{d_K}{c_K + 2d_K} {}^t \tilde{\mathbf{u}}_{g+1}^n \mathbb{M}_K \tilde{\mathbf{u}}_{g+1}^n \right) \left(\Delta x_g - \frac{c\Delta t}{2k}(c_K + 2d_K) \right). \end{aligned}$$

Ceci montre bien que, sous la condition de stabilité propre au schéma Galerkin Discontinu à gauche (pour le pas de temps $\Delta t/k$), l'énergie modifiée \mathcal{F}_g^n est bien une forme quadratique définie positive des inconnues $(\mathbf{u}_i^n)_{i \leq g}$, $(\mathbf{v}_i^{n-\frac{1}{2k}})_{i \leq g}$ et $\tilde{\mathbf{u}}_{g+1}^n$.

Similairement, en prenant $\mathbb{M}_g = \mathbb{M}_d$, on montre que sous la condition de stabilité propre au schéma Galerkin Discontinu à droite (pour le pas de temps Δt), l'énergie modifiée \mathcal{F}_d^n est bien une forme quadratique définie positive des inconnues $(\mathbf{u}_i^n)_{i \geq d}$, $(\mathbf{v}_i^{n-1/2})_{i \geq d}$ et $\tilde{\mathbf{u}}_{d-1}^n$.

Si $(d_K + c_K/2)c\Delta t < \min(k\Delta x_g, \Delta x_d)$, alors l'énergie totale $\mathcal{F}_g^n + \mathcal{F}_d^n$ est clairement une forme quadratique définie positive des inconnues numériques en jeu : $(\mathbf{u}_j^n)_{j \leq g}$, $(\mathbf{v}_j^{n-\frac{1}{2k}})_{j \leq g}$, $(\mathbf{u}_j^n)_{j \geq d}$, $(\mathbf{v}_j^{n-1/2})_{j \geq d}$, $\tilde{\mathbf{u}}_{g+1}^n$ et $\tilde{\mathbf{u}}_{d-1}^n$.

On cherche maintenant à calculer les variations de ces énergies $\Delta \mathcal{F}_g = \mathcal{F}_g^{n+1} - \mathcal{F}_g^n$ et $\Delta \mathcal{F}_d = \mathcal{F}_d^{n+1} - \mathcal{F}_d^n$ au cours d'un pas de l'algorithme proposé ci-dessus. Dans la suite, on note $\theta = \frac{d_K}{c_K + 2d_K}$. En reprenant les démonstrations pour les volumes finis, on montre que :

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{F}_g &= \Delta x_g \sum_{s=1}^k \left[\frac{{}^t \tilde{\mathbf{u}}_{g+1}^{n+\frac{s-1}{k}} + \tilde{\mathbf{u}}_{g+1}^{n+\frac{s}{k}}}{2} \left(\theta \mathbb{M}_K(\tilde{\mathbf{u}}_{g+1}^{n+\frac{s}{k}} - \tilde{\mathbf{u}}_{g+1}^{n+\frac{s-1}{k}}) + \frac{c\Delta t}{k\Delta x_g} \mathbb{K}_K \mathbf{v}_g^{n+\frac{2s-1}{2k}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{{}^t \mathbf{u}_g^{n+\frac{s-1}{k}} + \mathbf{u}_g^{n+\frac{s}{k}}}{2} \left(\theta \mathbb{M}_K(\mathbf{u}_g^{n+\frac{s}{k}} - \mathbf{u}_g^{n+\frac{s-1}{k}}) + \frac{c\Delta t}{k\Delta x_g} \mathbb{K}_K \tilde{\mathbf{v}}_{g+1}^{n+\frac{2s-1}{2k}} \right) \right], \\ \Delta \mathcal{F}_d &= \Delta x_d \left[\frac{{}^t \tilde{\mathbf{u}}_{d-1}^n + \tilde{\mathbf{u}}_{d-1}^{n+1}}{2} \left(\theta \mathbb{M}_K(\tilde{\mathbf{u}}_{d-1}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_{d-1}^n) + \frac{c\Delta t}{\Delta x_d} \mathbb{K}_K \mathbf{v}_d^{n+\frac{1}{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{{}^t \mathbf{u}_d^n + \mathbf{u}_d^{n+1}}{2} \left(\theta \mathbb{M}_K(\mathbf{u}_d^{n+1} - \mathbf{u}_d^n) + \frac{c\Delta t}{\Delta x_d} \mathbb{K}_K \tilde{\mathbf{v}}_{d-1}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right]. \end{aligned}$$

On propose donc les notations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{A}^s = \frac{{}^t \mathbf{u}_g^{n+\frac{s-1}{k}} + \mathbf{u}_g^{n+\frac{s}{k}}}{2}, & \mathbf{B}^s = \frac{2\theta k\Delta x_g}{c\Delta t} \mathbb{M}_K \left(\mathbf{u}_g^{n+\frac{s}{k}} - \mathbf{u}_g^{n+\frac{s-1}{k}} \right) + 2\mathbb{K}_K \tilde{\mathbf{v}}_{g+1}^{n+\frac{2s-1}{2k}}, \\ \tilde{\mathbf{A}}^s = \frac{\tilde{\mathbf{u}}_{g+1}^{n+\frac{s-1}{k}} + \tilde{\mathbf{u}}_{g+1}^{n+\frac{s}{k}}}{2}, & \tilde{\mathbf{B}}^s = -\frac{2\theta k\Delta x_g}{c\Delta t} \mathbb{M}_K \left(\tilde{\mathbf{u}}_{g+1}^{n+\frac{s}{k}} - \tilde{\mathbf{u}}_{g+1}^{n+\frac{s-1}{k}} \right) - 2\mathbb{K}_K \mathbf{v}_g^{n+\frac{2s-1}{2k}}, \\ \mathbf{A} = \frac{{}^t \mathbf{u}_d^n + \mathbf{u}_d^{n+1}}{2}, & \mathbf{B} = -\frac{2\theta \Delta x_d}{c\Delta t} \mathbb{M}_K \left(\mathbf{u}_d^{n+1} - \mathbf{u}_d^n \right) - 2\mathbb{K}_K \tilde{\mathbf{v}}_{d-1}^{n+\frac{1}{2}}, \\ \tilde{\mathbf{A}} = \frac{\tilde{\mathbf{u}}_{d-1}^n + \tilde{\mathbf{u}}_{d-1}^{n+1}}{2}, & \tilde{\mathbf{B}} = \frac{2\theta \Delta x_d}{c\Delta t} \mathbb{M}_K \left(\tilde{\mathbf{u}}_{d-1}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_{d-1}^n \right) + 2\mathbb{K}_K \mathbf{v}_d^{n+\frac{1}{2}}. \end{array} \right. \quad (30)$$

Avec ces notations, on a plus simplement :

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{F}_g &= -\frac{c\Delta t}{2} \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k \left[{}^t \tilde{\mathbf{A}}^s \tilde{\mathbf{B}}^s + {}^t \mathbf{A}^s \mathbf{B}^s \right], \\ \Delta \mathcal{F}_d &= \frac{c\Delta t}{2} \left[{}^t \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{B}} + {}^t \mathbf{A} \mathbf{B} \right]. \end{aligned}$$

3.3.2 Construction d'un algorithme conservant l'énergie globale

On se propose dans la suite de construire le même type d'algorithme de couplage que pour la méthode de volumes finis. On se limite ici à la construction de l'équivalent de la méthode $\alpha\gamma$. On construit donc, pour $\forall(\alpha, \gamma)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k {}^t\tilde{\mathbf{A}}^s \tilde{\mathbf{B}}^s = {}^t\mathbf{A}\mathbf{B} &\Leftarrow \begin{cases} \mathbf{B} = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k \tilde{\mathbf{B}}^s, \\ \tilde{\mathbf{A}}^s = \mathbf{A} - \alpha \mathbb{M}_K^{-1} \mathbf{B} + \frac{\alpha}{k} \mathbb{M}_K^{-1} (2\tilde{\mathbf{B}}^1 + \dots + 2\tilde{\mathbf{B}}^{s-1} + \tilde{\mathbf{B}}^s) \end{cases} \\ \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k {}^t\mathbf{A}^s \mathbf{B}^s = {}^t\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}} &\Leftarrow \begin{cases} \tilde{\mathbf{B}} = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k \mathbf{B}^s, \\ \mathbf{A}^s = \tilde{\mathbf{A}} - \gamma \mathbb{M}_K^{-1} \tilde{\mathbf{B}} + \frac{\gamma}{k} \mathbb{M}_K^{-1} (2\mathbf{B}^1 + \dots + 2\mathbf{B}^{s-1} + \mathbf{B}^s) \end{cases} \end{aligned}$$

On peut montrer que ces algorithmes sont réellement explicites (et donc facilement implémentables) si on choisit $\alpha = \frac{\nu_d}{4(1-\theta)}$ et $\gamma = \frac{\nu_d}{4\theta}$ (on a noté $\nu_d = c\Delta t/\Delta x_d$). Nous décrivons en détail l'algorithme ci-dessous.

Étape 0. On dispose de $(\mathbf{u}_j^n)_{j \leq g}$, $(\mathbf{v}_j^{n+\frac{1}{2k}})_{j \leq g}$, $(\mathbf{u}_j^n)_{j \geq d}$, $(\mathbf{v}_j^{n+1/2})_{j \geq d}$, $\tilde{\mathbf{u}}_{g+1}^n$ et $\tilde{\mathbf{u}}_{d-1}^n$.

Étape 1. On veut avancer le champ u à gauche, de $\Delta t/k$. Pour cela, on a besoin de $\mathbb{K}_K \tilde{\mathbf{v}}_{g+1}^{n+\frac{1}{2k}}$. On a les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\Delta x_g k}{c\Delta t} \mathbb{M}_K (\mathbf{u}_g^{n+\frac{1}{k}} - \mathbf{u}_g^n) + \mathbb{K}_K \mathbf{v}_{g-1}^{n+\frac{1}{2k}} + \mathbb{K}_K \mathbf{v}_g^{n+\frac{1}{2k}} + \mathbb{K}_K \tilde{\mathbf{v}}_{g+1}^{n+\frac{1}{2k}} = 0, \\ \frac{1}{2} \mathbb{M}_K (\mathbf{u}_g^n + \mathbf{u}_g^{n+\frac{1}{k}}) \equiv \mathbb{M}_K \mathbf{A}^1 = \mathbb{M}_K \tilde{\mathbf{A}} - \gamma \tilde{\mathbf{B}} + \frac{\gamma}{k} \mathbf{B}^1, \\ \mathbf{B}^1 = \frac{2\theta k \Delta x_g}{c\Delta t} \mathbb{M}_K (\mathbf{u}_g^{n+\frac{1}{k}} - \mathbf{u}_g^n) + 2\mathbb{K}_K \tilde{\mathbf{v}}_{g+1}^{n+\frac{1}{2k}}, \\ \mathbb{M}_K \tilde{\mathbf{A}} - \gamma \tilde{\mathbf{B}} = (\frac{1}{2} - 2\gamma\theta \frac{\Delta x_d}{c\Delta t}) \mathbb{M}_K \tilde{\mathbf{u}}_{d-1}^{n+1} + (\frac{1}{2} + 2\gamma\theta \frac{\Delta x_d}{c\Delta t}) \mathbb{M}_K \tilde{\mathbf{u}}_{d-1}^n - 2\gamma \mathbb{K}_K \mathbf{v}_d^{n+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Comme dans le cas en volumes finis, il suffit de prendre $\gamma = \nu_d/(4\theta)$ pour que le système ci-dessus soit résoluble sans connaître $\tilde{\mathbf{u}}_{d-1}^{n+1}$. Il reste alors à prendre pour $\mathbb{K}_K \tilde{\mathbf{v}}_{g+1}^{n+\frac{1}{2k}}$:

$$\begin{aligned} \frac{c\Delta t}{2k} \left(\frac{1-\theta}{\Delta x_g} + \frac{\theta}{\Delta x_d} \right) \mathbb{K}_K \tilde{\mathbf{v}}_{g+1}^{n+\frac{1}{2k}} &= \theta \mathbb{M}_K (\mathbf{u}_g^n - \tilde{\mathbf{u}}_{d-1}^n) + \frac{\nu_d}{2} \mathbb{K}_K \mathbf{v}_d^{n+\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{\theta c\Delta t}{2k} \left(\frac{1}{\Delta x_d} - \frac{1}{\Delta x_g} \right) (\mathbb{K}_K \mathbf{v}_{g-1}^{n+\frac{1}{2k}} + \mathbb{K}_K \mathbf{v}_g^{n+\frac{1}{2k}}). \quad (31) \end{aligned}$$

Remarque : il est important de noter ici que seule la construction du terme inconnu $\mathbb{K}_K \tilde{\mathbf{v}}_{g+1}^{n+\frac{1}{2k}}$ est nécessaire pour l'algorithme. L'équation ci-dessus donne donc bien un moyen d'avancer. Cependant, la matrice \mathbb{K}_K n'étant pas inversible, l'équation précédente n'implique en fait pas que l'on sache construire un jeu de valeurs fictives $\tilde{\mathbf{v}}_{g+1}^{n+\frac{1}{2k}}$, ce qui est une faiblesse

de l'algorithme. En somme, le sous-domaine gauche peu recevoir un flux, mais ce flux ne s'exprime pas nécessairement comme issu d'une valeur fictive dans l'autre sous-domaine.

Étape 2. On veut avancer le champ v à gauche, de $\Delta t/k$. Pour cela, on a besoin de $\mathbb{K}_K \tilde{\mathbf{u}}_{g+1}^{n+\frac{1}{k}}$. On a les équations suivantes :

$$\begin{cases} \Delta x_d \mathbb{M}_K \frac{\mathbf{u}_d^{n+1} - \mathbf{u}_d^n}{c\Delta t} + \mathbb{K}_K \tilde{\mathbf{v}}_{d-1}^{n+1/2} + \mathbb{K}_K \mathbf{v}_d^{n+1/2} + \mathbb{K}_K \mathbf{v}_{d+1}^{n+1/2} = 0, \\ \frac{1}{2} \mathbb{M}_K (\tilde{\mathbf{u}}_{g+1}^n + \tilde{\mathbf{u}}_{g+1}^{n+\frac{1}{k}}) \equiv \mathbb{M}_K \tilde{\mathbf{A}}^1 = \mathbb{M}_K \mathbf{A} - \alpha \mathbf{B} + \frac{\alpha}{k} \tilde{\mathbf{B}}^1, \\ \tilde{\mathbf{B}}^1 = -\frac{2\theta k \Delta x_g}{c\Delta t} \mathbb{M}_K (\tilde{\mathbf{u}}_{g+1}^{n+\frac{1}{k}} - \tilde{\mathbf{u}}_{g+1}^n) - 2\mathbb{K}_K \mathbf{v}_g^{n+\frac{1}{2k}}, \\ \mathbb{M}_K \mathbf{A} - \alpha \mathbf{B} = -(2\theta\alpha + \frac{\nu_d}{2}) (\mathbb{K}_K \mathbf{v}_d^{n+\frac{1}{2}} + \mathbb{K}_K \mathbf{v}_{d+1}^{n+\frac{1}{2}}) + (2\alpha(1-\theta) - \frac{\nu_d}{2}) \mathbb{K}_K \tilde{\mathbf{v}}_{d-1}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbb{M}_K \mathbf{u}_d^n. \end{cases}$$

Il suffit donc de prendre $\alpha = \nu_d/(4(1-\theta))$ pour que le système déterminant $\tilde{\mathbf{u}}_{g+1}^{n+\frac{1}{k}}$ soit indépendant de $\tilde{\mathbf{v}}_{d-1}^{n+\frac{1}{2}}$ qui sera accessible seulement à la fin des k sous-pas de temps. Ce système est effectivement soluble et s'écrit :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} + \frac{\theta \Delta x_g}{2\Delta x_d(1-\theta)} \right) \tilde{\mathbf{u}}_{g+1}^{n+\frac{1}{k}} &= \mathbf{u}_d^n - \left(\frac{1}{2} - \frac{\theta \Delta x_g}{2\Delta x_d(1-\theta)} \right) \tilde{\mathbf{u}}_{g+1}^n - \frac{\nu_d}{2k(1-\theta)} \mathbb{M}_K^{-1} \mathbb{K}_K \mathbf{v}_g^{n+\frac{1}{2k}} \\ &\quad - \frac{\nu_d}{2(1-\theta)} \mathbb{M}_K^{-1} (\mathbb{K}_K \mathbf{v}_d^{n+\frac{1}{2}} + \mathbb{K}_K \mathbf{v}_{d+1}^{n+\frac{1}{2}}). \end{aligned} \quad (32)$$

Étapes 2s-1 et 2s. On veut reproduire les deux étapes précédentes, puisque les équations sont quasi-inchangées. Elles font seulement intervenir les termes, désormais connus $\mathbf{B}^1, \dots, \mathbf{B}^s$ et $\tilde{\mathbf{B}}^1, \dots, \tilde{\mathbf{B}}^s$. Les équations à résoudre pour obtenir $\mathbb{K}_K \tilde{\mathbf{v}}_{g+1}^{n+\frac{2s-1}{2k}}$ et $\tilde{\mathbf{u}}_{g+1}^{n+\frac{s}{k}}$ sont respectivement :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-\theta}{\Delta x_g} + \frac{\theta}{\Delta x_d} \right) \mathbb{K}_K \tilde{\mathbf{v}}_{g+1}^{n+\frac{2s-1}{2k}} &= \frac{2k\theta}{c\Delta t} \mathbb{M}_K (\mathbf{u}_g^{n+\frac{s-1}{k}} - \tilde{\mathbf{u}}_{d-1}^n) + \frac{k}{\Delta x_d} \mathbb{K}_K \mathbf{v}_d^{n+\frac{1}{2}} \\ &\quad + \theta \left(\frac{1}{\Delta x_d} - \frac{1}{\Delta x_g} \right) (\mathbb{K}_K \mathbf{v}_{g-1}^{n+\frac{2s-1}{2k}} + \mathbb{K}_K \mathbf{v}_g^{n+\frac{2s-1}{2k}}) \\ &\quad - \frac{1}{\Delta x_d} (\mathbf{B}^1 + \dots + \mathbf{B}^{s-1}), \\ \left(\frac{1-\theta}{\Delta x_g} + \frac{\theta}{\Delta x_d} \right) \tilde{\mathbf{u}}_{g+1}^{n+\frac{s}{k}} &= \frac{2(1-\theta)}{\Delta x_g} \mathbf{u}_d^n - \left(\frac{1-\theta}{\Delta x_g} - \frac{\theta}{\Delta x_d} \right) \tilde{\mathbf{u}}_{g+1}^{n+\frac{s-1}{k}} - \frac{\nu_d}{k\Delta x_g} \mathbb{M}_K^{-1} \mathbb{K}_K \mathbf{v}_g^{n+\frac{2s-1}{2k}} \\ &\quad - \frac{\nu_d}{\Delta x_g} \mathbb{M}_K^{-1} (\mathbb{K}_K \mathbf{v}_d^{n+\frac{1}{2}} + \mathbb{K}_K \mathbf{v}_{d+1}^{n+\frac{1}{2}}) \\ &\quad + \frac{\nu_d}{k\Delta x_g} \mathbb{M}_K^{-1} (\tilde{\mathbf{B}}^1 + \dots + \tilde{\mathbf{B}}^{s-1}). \end{aligned} \quad (33)$$

Étapes 2k-1 et 2k. On termine ainsi l'intégration du sous-domaine gauche en k sous-pas de temps. On dispose de toutes les variables "standard" à gauche, à savoir $(\mathbf{u}_j^{n+1})_{j \leq g}$ et $(\mathbf{v}_j^{n+1+\frac{1}{2k}})_{j \leq g}$ et de $\tilde{\mathbf{u}}_{g+1}^{n+1}$. On dispose également de toutes les valeurs \mathbf{B}^s et $\tilde{\mathbf{B}}^s$, pour $1 \leq s \leq k$.

Étape $2k + 1$. On veut avancer de Δt le champ u à droite. Pour cela, on a besoin de $\tilde{\mathbf{v}}_{d-1}^{n+\frac{1}{2}}$. Il suffit de prendre :

$$\mathbb{K}_K \tilde{\mathbf{v}}_{d-1}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\theta}{1-\theta} \left(\mathbb{K}_K \mathbf{v}_d^{n+\frac{1}{2}} + \overline{\mathbb{K}}_K \mathbf{v}_{d+1}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{2k(1-\theta)} \sum_{s=1}^k \tilde{B}^s.$$

Remarque : ici encore, la construction du terme inconnu $\mathbb{K}_K \tilde{\mathbf{v}}_{d-1}^{n+\frac{1}{2}}$ est nécessaire pour l'algorithme et l'équation ci-dessus donne bien un moyen d'avancer. Cependant, la matrice \mathbb{K}_K n'étant pas inversible, l'équation précédente n'implique en fait pas que l'on sache construire un jeu de valeurs fictives $\tilde{\mathbf{v}}_{d-1}^{n+\frac{1}{2}}$, ce qui est une autre faiblesse de l'algorithme du même type que celle vue précédemment.

Étape $2k + 2$. On veut avancer de Δt le champ v à droite. On vérifie qu'il suffit de prendre

$$\tilde{\mathbf{u}}_{d-1}^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}_{d-1}^n + \frac{\nu_d}{2\theta} \mathbb{M}_K^{-1} \left(1/k \sum_{s=1}^k B^s - 2\overline{\mathbb{K}}_K \mathbf{v}_d^{n+\frac{1}{2}} \right).$$

On dispose bien à la fin de cette dernière étape de toutes les valeurs à droite : $(\mathbf{u}_j^{n+1})_{j \geq d}$, $(\mathbf{v}_j^{n+3/2})_{j \geq d}$ et $\tilde{\mathbf{u}}_{d-1}^{n+1}$.

Ainsi, l'algorithme proposé est bien explicite et constructible. Il permet de conserver l'énergie totale. De plus Il demande seulement l'utilisation des variables numériques suivantes : $(\mathbf{u}_j^n)_{j \leq g}$, $(\mathbf{v}_j^{n+\frac{1}{2k}})_{j \leq g}$, $(\mathbf{u}_j^n)_{j \geq d}$, $(\mathbf{v}_j^{n+1/2})_{j \geq d}$, $\tilde{\mathbf{u}}_{g+1}^n$ et $\tilde{\mathbf{u}}_{d-1}^n$, qui sont contrôlées par l'énergie totale (sous réserve que $(d_K + c_K/2) c \Delta t < \min(k \Delta x_g, \Delta x_d)$). Le schéma global de couplage est donc stable.

3.3.3 Simulations numériques

On cherche ici à tester l'algorithme précédent (de la famille $\alpha\gamma$ avec $\alpha = \frac{\nu_d}{4(1-\theta)}$ et $\gamma = \frac{\nu_d}{4\theta}$) pour plusieurs valeurs de k dans plusieurs configurations (dont celles de la section précédente) :

- **Cas 1 :** deux maillages réguliers avec $\Delta x_d = \Delta x_g$ (soit $\nu_g = \nu_d/k$);
- **Cas 2 :** deux maillages réguliers avec $\Delta x_d = k \Delta x_g$ (soit $\nu_d = \nu_g$);
- **Cas 3 :** deux maillages irréguliers avec $\Delta x_d = \Delta x_g$ près de leur interface.
- **Cas 4 :** un maillage grossier réguliers Δx_d et un maillage fin composé de deux parties régulières en Δx_g et Δx_d (du côté de leur interface).

On regarde toujours la propagation d'un pulse de la zone grossière à la zone fine. Pour toutes les simulations, nous avons pris un nombre de Courant (par rapport aux plus petites mailles) de 0.45 (la limite de stabilité est $\nu = 0.5$) et nous avons pris $\theta = 0.4$.

Cas 1

Les essais numériques sont résumés pour le **Cas 1** dans la table 9. Le pulse est initialement en $x = 0.5$ et se déplace vers la gauche. La simulation est arrêtée à $t = 1$. Les deux domaines maillés identiquement sont situés en $[-1; 0]$ et $[0; 1]$. On tire des expériences numériques les conclusions suivantes :

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 5$	$k = 9$	$k = 17$	$k = 33$
$n_{\{gd\}} = 50$	$1.13 \cdot 10^{-4}$	0.821	$2.75 \cdot 10^{-4}$	$3.06 \cdot 10^{-4}$	$3.18 \cdot 10^{-4}$	$3.22 \cdot 10^{-4}$	$3.23 \cdot 10^{-4}$
$n_{\{gd\}} = 100$	$8.2 \cdot 10^{-6}$	0.936	$5.43 \cdot 10^{-5}$	$6.05 \cdot 10^{-5}$	$6.31 \cdot 10^{-5}$	$6.39 \cdot 10^{-5}$	$6.41 \cdot 10^{-5}$
$n_{\{gd\}} = 200$	$4.99 \cdot 10^{-7}$	0.982	$1.18 \cdot 10^{-5}$	$1.33 \cdot 10^{-5}$	$1.39 \cdot 10^{-5}$	$1.41 \cdot 10^{-5}$	$1.42 \cdot 10^{-5}$

TAB. 9 – *Fraction d'énergie réfléchie* - **Algorithme $\alpha\gamma$** - **Cas 1**.

- l'énergie est effectivement conservée, le schéma est stable si $\nu < 0.5$ partout;
- l'algorithme est incapable de gérer correctement une valeur paire de k (voir Figure 20). Ceci s'explique comme précédemment par le fait que les valeurs paires de k ne fournissent pas d'approximation synchrone en $t^{n+1/2}$ pour v à l'interface, et par le fait qu'en moyenne les flux du domaine grossier vers le domaine fin sont nuls quand j est pair;
- l'algorithme se comporte d'autant mieux que le nombre de points en espace est grand (voir Figure 21). L'énergie de l'onde parasite réfléchie semble encore d'ordre deux en Δx , donc le schéma numérique à l'interface est localement d'ordre un.

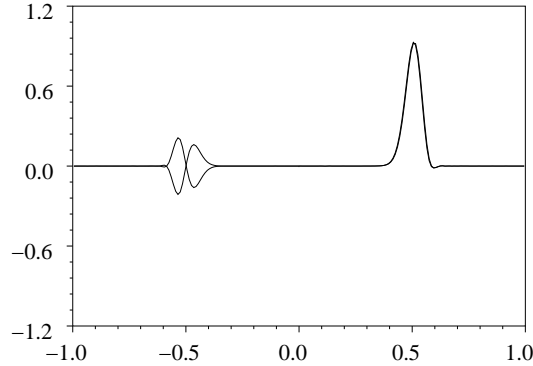
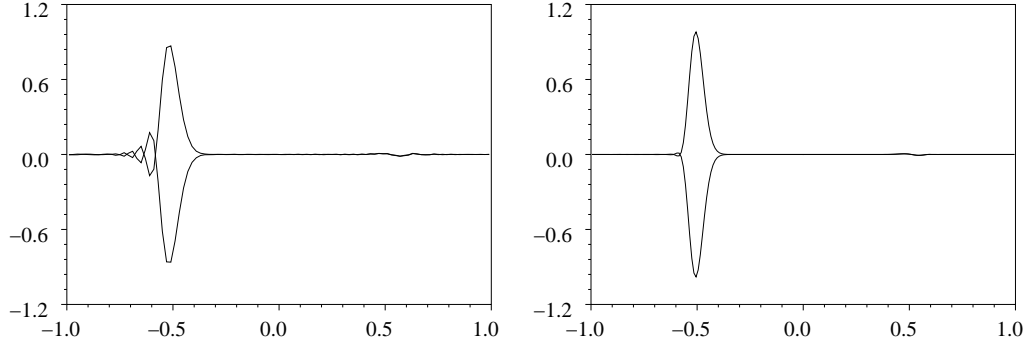


FIG. 20 – $\alpha\gamma$ - **Cas 1** - $\nu_d = 0.45$ - $k = 2$ - $n_d = n_g = 100$.

Cas 2

Des essais numériques similaires sont résumés dans la table 10. On a pris pour ces simulations $\theta = 0.5$ (ce qui minimise les réflexions parasites, mais avec une stabilité qui n'est

FIG. 21 - $\alpha\gamma$ - **Cas 1** - $\nu_d = 0.45$ - $k = 5$ - $n_{\{gd\}} = 50,100$.

pas théoriquement démontrée). De ces expériences, on tire la conclusion supplémentaire sui-

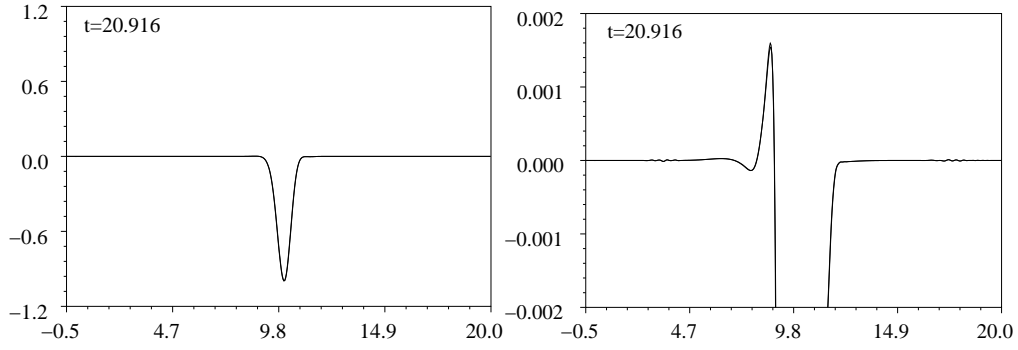
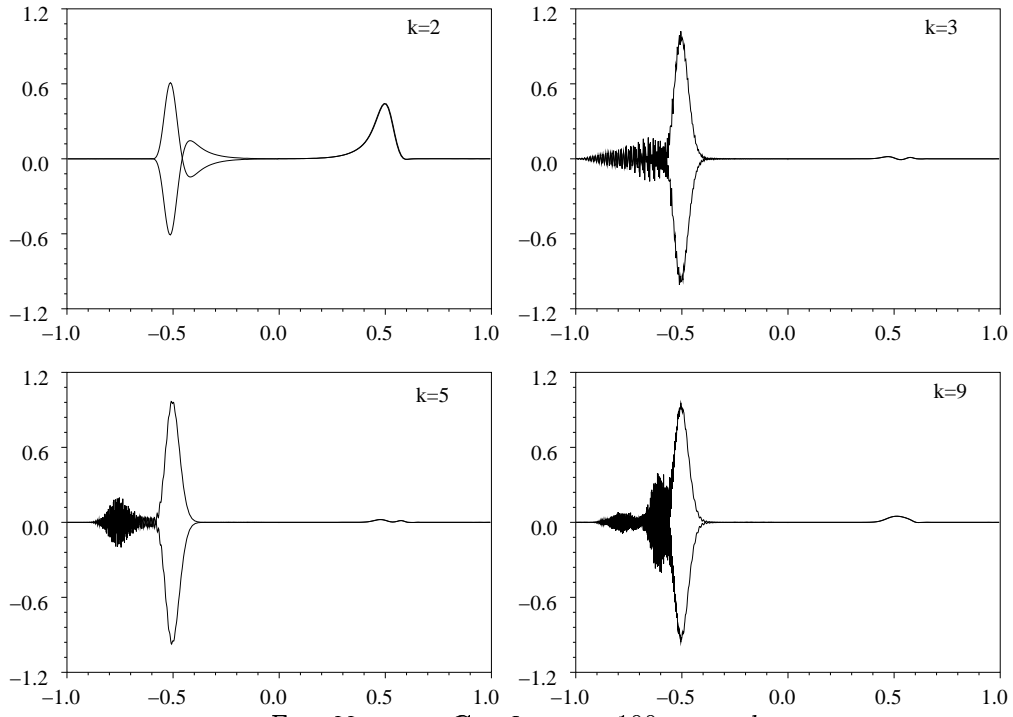
$\nu_d = 0.45$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 5$	$k = 9$
$n_d = 50$	$1.13 \cdot 10^{-4}$	0.254	$4.92 \cdot 10^{-3}$	$5.43 \cdot 10^{-3}$	$5.18 \cdot 10^{-3}$
$n_d = 100$	$8.2 \cdot 10^{-6}$	0.352	$8.07 \cdot 10^{-4}$	$1.20 \cdot 10^{-3}$	$4.02 \cdot 10^{-3}$

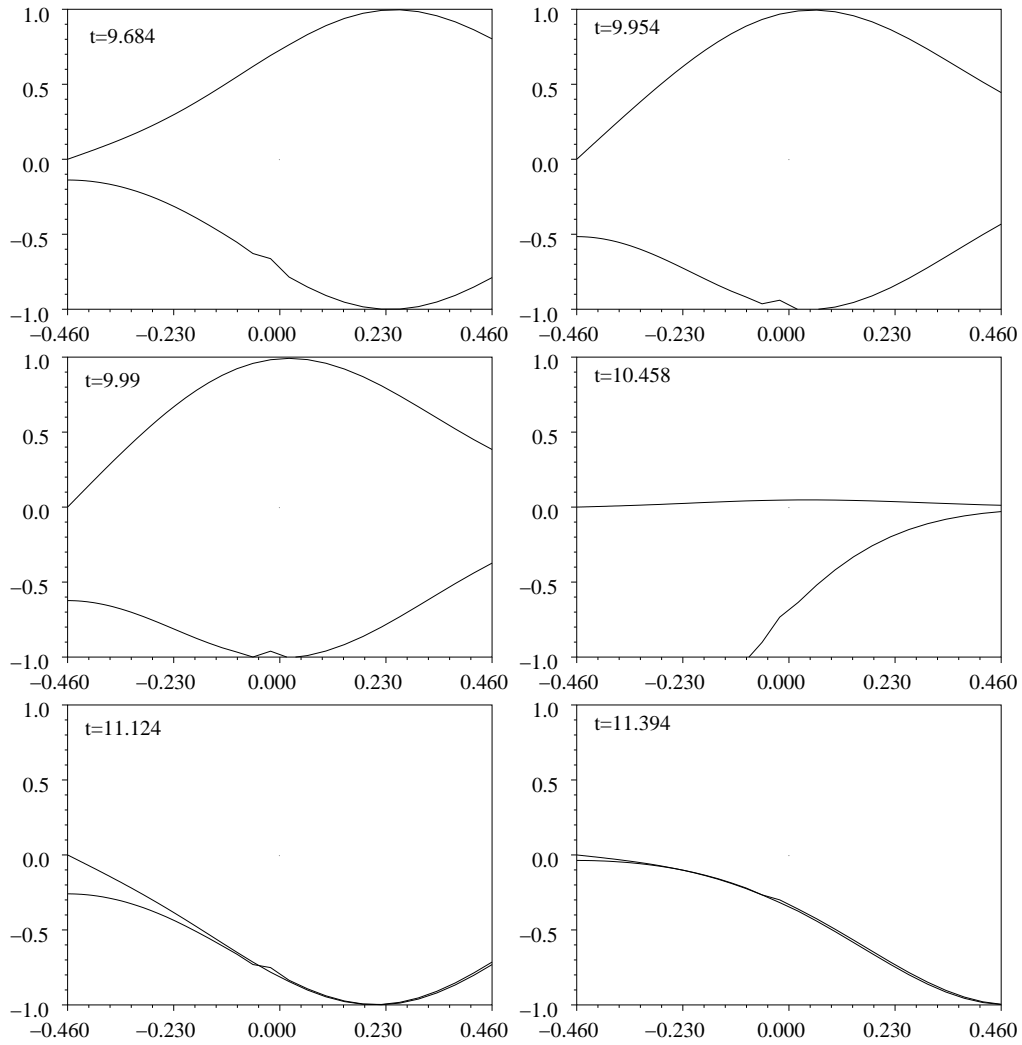
TAB. 10 - *Fraction d'énergie réfléchie* - **Cas 2** - $nd = 100$, $ng = k \cdot n_d$.

vante : l'algorithme ne sait pas gérer un brusque changement de la taille de maille entre les sous-domaines (voir Figure 22). Des oscillations parasites sont transmises à l'intérieur du sous-domaine. Ceci est un peu décevant, car la méthode Galerkin Discontinu est capable de gérer un brusque changement de taille de maille. Le problème vient en fait du terme source oscillant en temps au bord du domaine fin. Le domaine fin a en fait besoin d'avoir un nombre de Courant localement faible près de l'interface.

Cas 3

Pour le **Cas 3**, on réutilise exactement le même maillage que dans la section précédente (à savoir : $\Delta x_d = 0.04$, $\min(\Delta x_g) = 0.04/k$ et $k = 41$). Le maillage comporte donc 560 points. On prend encore un pulse initial de la forme $u(x) = -v(x) = \exp(-5 * (x - 10)^2)$ et on simule jusqu'à $T = 20.919$ en prenant $\nu_d = 0.45$. On a tracé sur la Figure 23 la solution obtenue à $T = 20.916$. On voit que la solution obtenue est très satisfaisante (notamment, on y voit quasiment aucune oscillation parasite et un effet très réduit de la dispersion du schéma de type Galerkin Discontinu). Des zooms sur la partie maillée finement montrent que la solution est assez régulière près de l'interface. Comme précédemment, l'utilisation d'un sous-cyclage de $k = 41$ permet de diviser le temps de calcul par environ huit (par rapport



FIG. 24 – **Cas 3** - $\nu_d = 0.45$ - $k = 41$.

au schéma standard en temps sur le même maillage) et par environ 300 avec un maillage uniforme.

Cas 4

Pour le **Cas 4**, on utilise le maillage suivant :

- sous-domaine grossier : $\Delta x_d = 0.1$ sur $[0 : 10]$;
- sous-domaine fin : $\Delta x_g = \Delta x_d/k$ ($k = 41$) sur $[-1; -0.5]$ et $\Delta x_g = \Delta x_d$ sur $[-0.5; 0]$.

Le maillage comporte donc 310 points. On prend un pulse initial de la forme $u(x) = -v(x) = \exp(-5 * (x - 5)^2)$ et on simule jusqu'à $T = 12$. On voit sur la Figure 25 que l'algorithme gère parfaitement le changement de pas de temps (comme pour un maillage uniforme) mais aussi le pas d'espace (comme la méthode Galerkin Discontinu avec un pas de temps unique).

4 Conclusions

Dans ce rapport, nous avons montré qu'il est possible de construire des algorithmes permettant de gérer, pour la simulation numérique des équations de Maxwell ou de l'acoustique en une dimensions, un maillage localement raffiné en espace et un schéma en temps sous-cyclé pour certains sous-domaines.

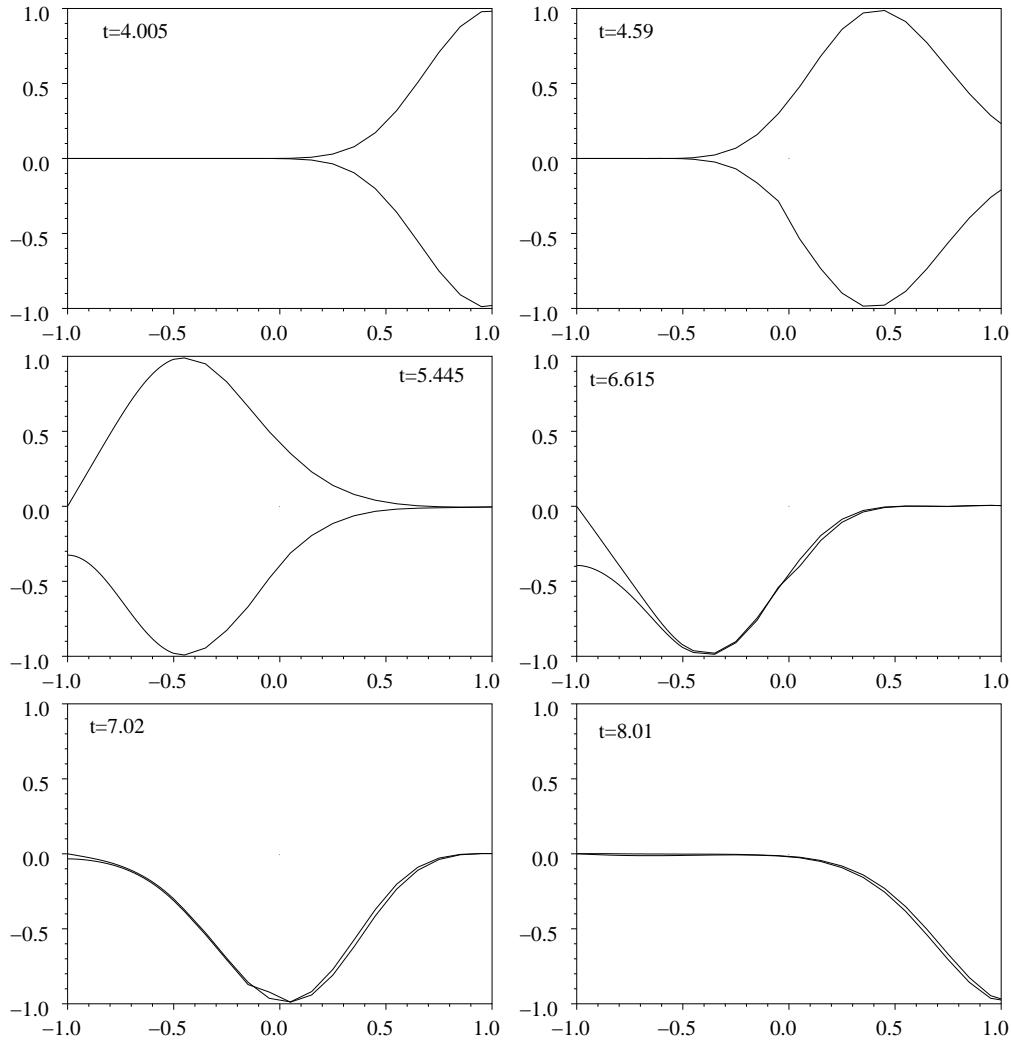
On peut tirer les conclusions suivantes à propos du raffinement en espace :

- il est peu naturel pour la méthode FDTD;
- il est naturel pour les méthodes de volumes finis et de Galerkin Discontinu (qui s'étendent sans problème en trois dimensions);
- il est cependant plus délicat avec la méthode des volumes, qui ne supportent pas vraiment de fortes hétérogénéités de maillage (ce qui a été par ailleurs également observé en trois dimensions d'espace);

Pour ce qui est du raffinement local en temps, on s'est appuyé sur des travaux antérieurs pour chercher des algorithmes de couplage entre différents sous-domaines utilisant des pas de temps différents (sous-cyclage). Les algorithmes recherchés devaient être intrinsèquement de type décalés, c'est-à-dire complètement explicites (sans inversion de matrice non locale).

On arrive aux conclusions suivantes :

- la recherche de ces algorithmes a conduit à certaines algorithmes très prometteurs (stabilité inchangée par rapport aux méthodes dans chaque sous-domaine, conservation exacte d'une énergie globale, pas de limite observée dans le nombre de sous-cycles k). Néanmoins, ils ne sont pas intuitifs et ne permettent pas de contrôler théoriquement les réflexions parasites entre sous-domaines;
- pour les couplages FVTD-FVTD et DGTD-DGTD, l'algorithme obtenu n'est pas parfait, dans la mesure où les mailles à l'interface doivent être de taille comparable (ce qui permet un effet de moyenne dans la prise en compte d'un terme oscillant de couplage);

FIG. 25 – Cas 4 - $\nu_d = 0.45$ - $k = 41$.

- pour le couplage FDTD-FDTD, dont le but est de coupler des maillages uniformes de tailles localement adaptées, on se heurte au problème précédent, à savoir que le brusque changement de maille à l'interface ne permet pas de lisser les oscillations provenant du terme source de couplage, ce qui génère des oscillations parasites.

Les algorithmes proposés ici, pour les méthodes de volumes finis et de Galerkin Discontinu, doivent maintenant être testés en deux dimensions d'espace au moins. A priori, aucune différence de principe n'apparaît pour tout ce qui concerne la conservation de l'énergie et la stabilité de l'algorithme de couplage. Par contre, les algorithmes devraient devenir localement implicites à l'interface (localement au sens "volume par volume", sans couplage entre tous les éléments touchant l'interface) et il faudra examiner attentivement, pour tous les angles des ondes incidentes, les ondes parasites émises par l'interface entre les sous-domaines.

Références

- [1] Marc Bernacki and Serge Piperno. Schémas en volumes finis avec flux centrés pour la propagation des ondes en aéroacoustique. Technical Report RR-4699, INRIA, 2003.
- [2] B. Cockburn, G. E. Karniadakis, and C.-W. Shu, editors. *Discontinuous Galerkin methods. Theory, computation and applications.*, volume 11 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [3] T. Fouquet. *Raffinement de maillage spatio-temporel pour les équations de Maxwell*. mathématiques appliquées, Université Paris 9, juin 2000.
- [4] S. Piperno and C. Farhat. Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems - part II: Energy transfer analysis and three-dimensional applications. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190(24):3147–3170, 2001.
- [5] S. Piperno, C. Farhat, and B. Larrouturou. Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems - part I: Model problem, theory, and two-dimensional application. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 124(1-2):79–112, 1995.
- [6] S. Piperno, M. Remaki, and L. Fezoui. A non-diffusive finite volume scheme for the 3D Maxwell equations on unstructured meshes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(6):2089–2108, 2002.
- [7] Serge Piperno and Loula Fezoui. A Discontinuous Galerkin FVTD method for 3D Maxwell equations. Technical Report RR-4733, INRIA, 2003.
- [8] M. Remaki. A new finite volume scheme for solving Maxwell's system. *COMPEL*, 19(3):913–931, 2000.
- [9] K. S. Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, (AP-16):302–307, 1966.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Présentation des schémas considérés	4
2.1	Introduction	4
2.2	Schéma de Yee	5
2.3	Volumes finis et schéma saute-mouton	6
2.4	Galerkin discontinu et schéma saute-mouton	10
2.5	Galerkin discontinu et schéma saute-mouton à deux pas	13
2.6	Galerkin discontinu et schéma saute-mouton d'ordre 4	15
2.7	Convergence des différents schémas	17
3	Raffinement espace-temps	21
3.1	Couplage FDTD-FDTD	22
3.2	Couplage entre formulations en volumes finis	28
3.2.1	Première famille d'algorithmes	30
3.2.2	Deuxième famille d'algorithmes	34
3.2.3	Synthèse	35
3.2.4	Simulations numériques	37
3.2.5	Conclusions et autres remarques	41
3.3	Couplage entre formulations de type Galerkin Discontinu	44
3.3.1	Construction d'une énergie globale	45
3.3.2	Construction d'un algorithme conservant l'énergie globale	47
3.3.3	Simulations numériques	49
4	Conclusions	54



Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Futurs : Parc Club Orsay Université - ZAC des Vignes
4, rue Jacques Monod - 91893 ORSAY Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38334 Montbonnot Saint-Ismier (France)

Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
<http://www.inria.fr>
ISSN 0249-6399